Resol

Pàgina 147

Com operar amb $\sqrt{-1}$?

Procedirem com els algebristes antics: quan ens trobem amb $\sqrt{-1}$, continuarem endavant operant amb aquesta amb naturalitat i tenint en compte que $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

1. Per comprovar que a i b són les arrels d'un polinomi, podem posar $(x-a)(x-b)$ i operar per obtenir aquest polinomi. Per exemple, aplicarem aquesta tècnica per comprovar que $2 + 3\sqrt{-1}$ i $2 - 3\sqrt{-1}$ són les arrels del polinomi $x^2 - 4x + 13$:

$$[x-(2+3\sqrt{-1})][x-(2-3\sqrt{-1})] =$$
$$= x^2 - (2+3\sqrt{-1})x - (2-3\sqrt{-1})x + (2+3\sqrt{-1})(2-3\sqrt{-1}) =$$
$$= x^2 - 2x - 3\sqrt{-1}x - 2x + 3\sqrt{-1}x + 2^2 - (3\sqrt{-1})^2 = x^2 - 4x + 4 - 9\cdot(-1) = x^2 - 4x + 13$$

- **Troba les arrels de l'equació $x^2 - 4x + 5$ i, aplicant la tècnica que acabem de veure, comprova que efectivament ho són.**

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm \sqrt{-1}$$

$$\left[x-(2+\sqrt{-1})\right]\left[x-(2-\sqrt{-1})\right] = x^2 - x(2-\sqrt{-1}) - x(2+\sqrt{-1}) + (2+\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1}) =$$
$$= x^2 - 4x + 4 - 2\sqrt{-1} + 2\sqrt{-1} - (-1) = x^2 - 4x + 5$$

2. Comprovem ara que -8 té tres arrels cúbiques: -2, $1+\sqrt{3}\sqrt{-1}$ y $1-\sqrt{3}\sqrt{-1}$.

La primera és clara:

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$

Vegem la segona:

$$(1+\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot(\sqrt{3}\sqrt{-1}) + 3\cdot 1\cdot(\sqrt{3}\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 =$$
$$= 1 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} + 3(\sqrt{3})^2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{3})^3(\sqrt{-1})^3 =$$
$$= 1 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} + 9(-1) + 3\sqrt{3}(-1\cdot\sqrt{-1}) =$$
$$= 1 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} - 9 - 3\sqrt{3}\sqrt{-1} = -8$$

- **Comprova la tercera veient que $(1-\sqrt{3}\sqrt{-1})^3$ és igual a -8.**

$$(1-\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = 1^3 - 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{3}\sqrt{-1} + 3\cdot 1\cdot(\sqrt{3}\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 =$$
$$= 1 - 3\sqrt{3}\sqrt{-1} + 3\cdot 3\cdot(-1) - 3\sqrt{3}\cdot(-1)\sqrt{-1} = 1 - 3\sqrt{3}\sqrt{-1} - 9 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} = -8$$

1 En què consisteixen els nombres complexos

Pàgina 148

1 Cert o fals?

a) El nombre 7 és un nombre real. Per tant, no és un nombre complex.

b) Si $a + bi$ és un nombre complex, aleshores no pot ser nombre real.

c) Perquè el nombre complex $a + bi$ sigui imaginari fa falta que a sigui zero.

d) Perquè el nombre complex $a + bi$ sigui imaginari és necessari que b sigui diferent de zero.

e) El nombre $0 + 0i$ ni és complex ni és real.

f) El nombre 5 no té nombre conjugat.

g) Si un nombre complex coincideix amb el seu conjugat, aleshores és un nombre real.

h) Si un nombre complex coincideix amb el seu oposat, aleshores és el zero.

i) Si l'oposat d'un nombre complex coincideix amb el seu conjugat, aleshores és imaginari pur.

a) Fals. Els nombres reals són nombres complexos la part imaginària dels quals és zero.

b) Fals. Si $b = 0$, el nombre complex també és un nombre real.

c) Fals. La part real no influeix. És imaginari si la seva part imaginària no és nul·la.

d) Cert.

e) Fals. El número $0 + 0i$ és real pero no és imaginari perquè la seva part imaginària és zero.

f) Fals. El nombre conjugat de $5 = 5 + 0i$ és $5 = 5 - 0i$.

g) Cert. Si $a + bi = a - bi \rightarrow b = -b \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$

Per tant, la seva part imaginària és zero i és un nombre real.

h) Cert. Si $a + bi = -a - bi \rightarrow 2a + 2bi = 0 \rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \rightarrow a = 0 \\ 2b = 0 \rightarrow b = 0 \end{cases}$

i) Cert (sempre que el número no sigui zero).

Si $-a - bi = a - bi \rightarrow -a = a \rightarrow 2a = 0 \rightarrow a = 0$

2 Fixa't en els nombres complexos següents:

$$3 + 2i,\ -\sqrt{3} + 5i,\ 2i,\ 7,\ 0$$

a) Quins són nombres reals? Posa'ls en forma binòmica.

b) Quins són imaginaris?

c) Quins són imaginaris purs? Posa'ls en forma binòmica.

d) Escriu l'oposat de cada un.

e) Escriu el conjugat de cada un.

a) $7 = 7 + 0i$ i $2 = 2 + 0i$ són nombres reals.

b) Els nombres imaginaris són $3 + 2i$, $-\sqrt{3} + 5i$ i $2i$.

c) $2i = 0 + 2i$ és imaginari pur.

d) L'oposat de $z = 3 + 2i$ és $-z = -3 - 2i$.

L'oposat de $z = 2i$ és $-z = -2i$.

L'oposat de $z = 0$ és $-z = 0$.

L'oposat de $z = -\sqrt{3} + 5i$ és $-z = \sqrt{3} - 5i$.

L'oposat de $z = 7$ és $-z = -7$.

e) El conjugat de $z = 3 + 2i$ és $\overline{z} = 3 - 2i$.

El conjugat de $z = 2i$ és $\overline{z} = -2i$.

El conjugat de $z = 0$ és $\overline{z} = 0$.

El conjugat de $z = -\sqrt{3} + 5i$ és $\overline{z} = -\sqrt{3} - 5i$.

El conjugat de $z = 7$ és $\overline{z} = 7$.

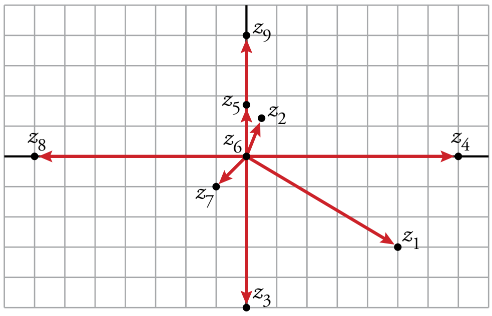
Pàgina 149

3 Representa gràficament els nombres complexos següents i digues quins són reals, quins imaginaris i, d'aquests, quins són imaginaris purs:

$$5-3i;\ \frac{1}{2}+\frac{5}{4}i;\ -5i;\ 7;\ \sqrt{3}\,i;\ 0;\ -1-i;\ -7;\ 4i$$

Si anomenem:

$z_1=5-3i$	$z_2=\frac{1}{2}+\frac{5}{4}i$	$z_3=-5i$
$z_4=7$	$z_5=\sqrt{3}\,i$	$z_6=0$
$z_7=-1-i$	$z_8=-7$	$z_9=4i$



Són reals z_4, z_6 i z_8. La resta són imaginaris. Són imaginaris purs z_3, z_5 i z_9.

4 Resol aquestes equacions i representa'n les solucions.

a) $z^2+4=0$

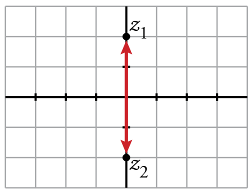
b) $z^2+6z+10=0$

c) $3z^2+27=0$

d) $3z^2-27=0$

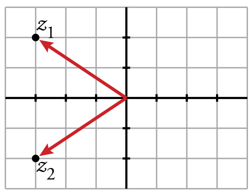
a) $z^2+4=0 \to z^2=-4 \to z=\pm\sqrt{-4} \to z=\pm 2i$

Les solucions són $z_1=2i$ i $z_2=-2i$.



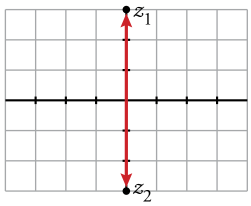
b) $z^2+6z+10=0 \to z=\dfrac{-6\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{-6\pm 2i}{2}=-3\pm 2i$

Les solucions són: $z_1=-3+2i$ i $z_2=-3-2i$.



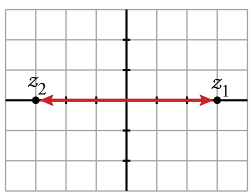
c) $3z^2+27=\ 0 \to z^2=-9 \to z=\pm\sqrt{-9} \to z=\pm 3i$

Les solucions són $z_1=3i$ i $z_2=-3i$.



d) $3z^2-27=0 \to z^2=9 \to z=\pm\sqrt{9} \to z=\pm 3$

Les solucions són: $z_1=3$ i $z_2=-3$.



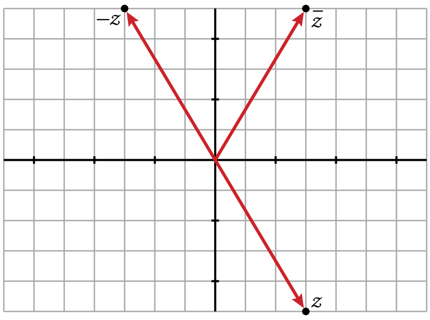
5 **Representa gràficament cada nombre complex, el seu oposat i el seu conjugat:**

a) $3 - 5i$ **b)** $5 + 2i$ **c)** $-1 - 2i$

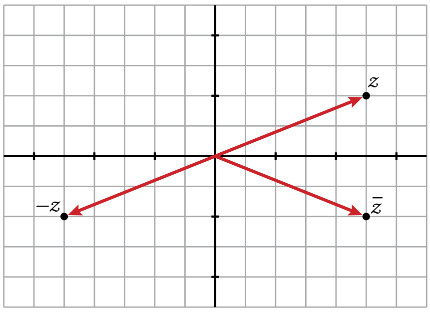
d) $-2 + 3i$ **e)** 5 **f)** 0

g) $2i$ **h)** $-5i$ **i)** -2

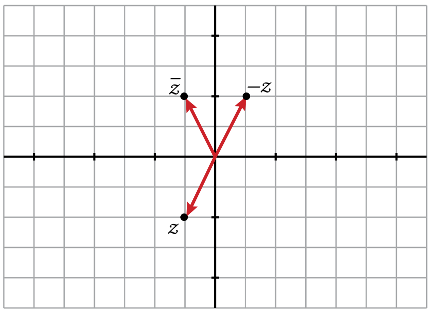
a) $z = 3 - 5i \rightarrow \begin{cases} -z = -3 + 5i \\ \overline{z} = 3 + 5i \end{cases}$



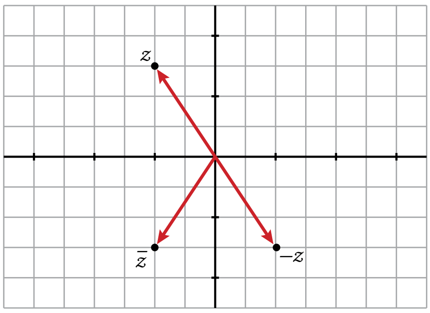
b) $z = 5 + 2i \rightarrow \begin{cases} -z = -5 - 2i \\ \overline{z} = 5 - 2i \end{cases}$



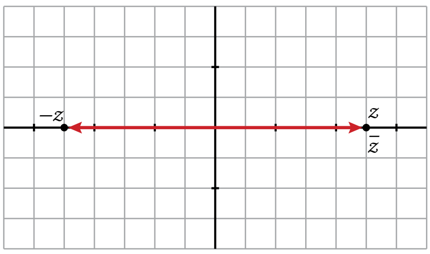
c) $z = -1 - 2i \rightarrow \begin{cases} -z = 1 + 2i \\ \overline{z} = -1 + 2i \end{cases}$



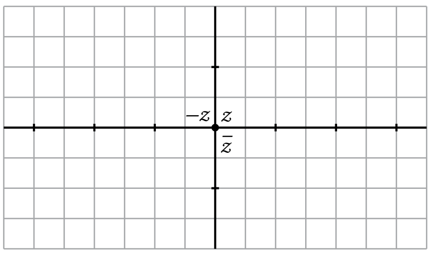
d) $z = -2 + 3i \rightarrow \begin{cases} -z = 2 - 3i \\ \overline{z} = -2 - 3i \end{cases}$



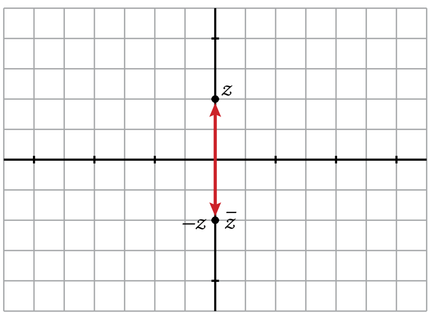
e) $z = 5 + 0i \rightarrow \begin{cases} -z = -5 + 0i \\ \overline{z} = 5 - 0i \end{cases}$



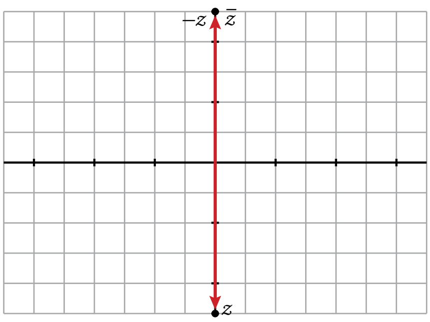
f) $z = 0 + 0i \rightarrow \begin{cases} -z = 0 + 0i \\ \overline{z} = 0 - 0i \end{cases}$



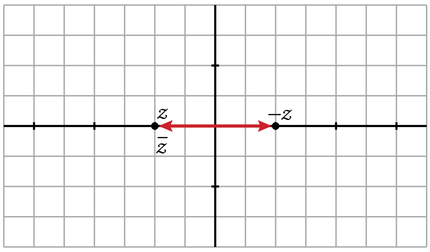
g) $z = 0 + 2i \rightarrow \begin{cases} -z = 0 - 2i \\ \overline{z} = 0 - 2i \end{cases}$



h) $z = 0 - 5i \rightarrow \begin{cases} -z = 0 + 5i \\ \overline{z} = 0 + 5i \end{cases}$



i) $z = -2 + 0i \rightarrow \begin{cases} -z = 2 - 0i \\ \overline{z} = -2 - 0i \end{cases}$



6 **Calcula i^3, i^4, i^5, i^6, i^{20}, i^{21}, i^{22}, i^{23}. Dóna un criteri per simplificar potències de i d'exponent natural.**

$$\begin{array}{llllll} i^1 = i & i^5 = i & i^9 = i & i^{13} = i & i^{17} = i & i^{21} = i \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 & i^{10} = -1 & i^{14} = -1 & i^{18} = -1 & i^{22} = -1 \\ i^3 = -i & i^7 = -i & i^{11} = -i & i^{15} = -i & i^{19} = -i & i^{23} = -i \\ i^4 = 1 & i^8 = 1 & i^{12} = 1 & i^{16} = 1 & i^{20} = 1 & i^{24} = 1 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ a \\ a \\ a \end{array}}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} i^{4n+1} = i \\ i^{4n+2} = -1 \\ i^{4n+3} = -i \\ i^{4n} = 1 \end{array}$$

Criteri vàlid des de $n = 0$.

2 Operacions amb nombres complexos en forma binòmica

Pàgina 150

1 Cert o fals?

a) La suma d'un nombre complex i el seu oposat és 0.

b) La suma d'un nombre complex i el seu conjugat és un nombre imaginari pur.

c) La suma d'un nombre complex i el seu conjugat és un nombre real.

d) El quadrat d'un nombre complex qualsevol és un nombre real.

e) El quadrat d'un nombre imaginari pur és un nombre real.

f) El quocient de dos nombres imaginaris purs és un nombre real perquè $\frac{ai}{a'i} = \frac{a}{a'}$.

a) Cert. Efectivament, $(a + bi) + (-a - bi) = 0$.

b) Fals. Per exemple, $(5 + 3i) + (5 - 3i) = 8$.

c) Cert. Perquè $(a + bi) + (a - bi) = 2a$ és un nombre real.

d) Fals. Per exemple, $(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$ no és cap nombre real.

e) Cert. Efectivament, $(bi)^2 = b^2i^2 = -b^2$ és un nombre real.

f) Cert. Podem simplificar la fracció dividint numerador i denominador entre i.

Pàgina 151

Fes-ho tu. Obtén un polinomi de segon grau les arrels del qual siguin $\sqrt{2}i$ i $-\sqrt{2}i$.

$P(x) = (x - \sqrt{2}i)[x - (-\sqrt{2}i)] = (x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) = x^2 - (\sqrt{2}i)^2 = x^2 - (-2) = x^2 + 2$

Fes-ho tu. Quant ha de valer x perquè $(4 + 3i)(3 - xi)$ sigui real?

$(4 + 3i)(3 - xi) = 12 - 4xi + 9i - 3xi^2 = 12 + 3x + (9 - 4x)i$

Perquè un número sigui real la seva part imaginària ha de ser zero. Per tant: $9 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{9}{4}$

2 Efectua les operacions següents i simplifica el resultat:

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i)$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i)$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i)$

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$

f) $\frac{2 + 4i}{4 - 2i}$

g) $\frac{1 - 4i}{3 + i}$

h) $\frac{4 + 4i}{-3 + 5i}$

i) $\frac{5 + i}{-2 - i}$

j) $\frac{1 + 5i}{3 + 4i}$

k) $\frac{4 - 2i}{i}$

l) $6 - 3\left(5 + \frac{2}{5}i\right)$

m) $\frac{(-3i)^2(1 - 2i)}{2 + 2i}$

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i) = 6 - 5i + 2 - i + 10 - 12i = 18 - 18i$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i) = 2 - 3i - 5 - 4i + 3 - 2i = -9i$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i) = 12 - 6i + 8i - 4i^2 = 12 + 2i + 4 = 16 + 2i$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i) = 10 - 12i + 15i - 18i^2 = 10 + 3i + 18 = 28 + 3i$

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i) = (-3i + 2i^2 + 3 - 2i)(1 + 3i) = (3 - 2 - 5i)(1 + 3i) =$

$= (1 - 5i)(1 + 3i) = 1 + 3i - 5i - 15i^2 = 1 + 15 - 2i = 16 - 2i$

f) $\frac{2 + 4i}{4 - 2i} = \frac{(2 + 4i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{8 + 4i + 16i + 8i^2}{16 - 4i^2} = \frac{20i}{16 + 4} = \frac{20i}{20} = i$

g) $\dfrac{1-4i}{3+i} = \dfrac{(1-4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{3-i-12i+4i^2}{9-i^2} = \dfrac{3-13i-4}{9+1} = \dfrac{-1-13i}{10} = \dfrac{-1}{10} - \dfrac{13}{10}i$

h) $\dfrac{4+4i}{-3+5i} = \dfrac{(4+4i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)} = \dfrac{-12-20i-12i-20i^2}{9-25i^2} = \dfrac{-12-32i+20}{9+25} =$

$= \dfrac{8-32i}{34} = \dfrac{8}{34} - \dfrac{32}{34}i = \dfrac{4}{17} - \dfrac{16}{17}i$

i) $\dfrac{5+1}{-2-i} = \dfrac{(5+i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \dfrac{-10+5i-2i+i^2}{4+1} = \dfrac{-10+3i-1}{5} = \dfrac{-11+3i}{5} = \dfrac{-11}{5} + \dfrac{3}{5}i$

j) $\dfrac{1+5i}{3+4i} = \dfrac{(1+5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{3-4i+15i-20i^2}{9-16i^2} = \dfrac{3+11i+20}{9+16} = \dfrac{23+11i}{25} = \dfrac{23}{25} + \dfrac{11}{25}i$

k) $\dfrac{4-2i}{i} = \dfrac{(4-2i)(-i)}{i(-i)} = \dfrac{-4i+2i^2}{1} = -4i-2 = -2-4i$

l) $6 - 3\left(5 + \dfrac{2}{5}i\right) = 6 - 15 + \dfrac{6}{5}i = -9 + \dfrac{6}{5}i$

m) $\dfrac{(-3i)^2(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{9i^2(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{-9(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{-9+18i}{(2+2i)} = \dfrac{(-9+18i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} =$

$= \dfrac{-18+18i+36i-36i^2}{4-4i^2} = \dfrac{-18+54i+36}{4+4} = \dfrac{18+54i}{8} = \dfrac{18}{8} + \dfrac{54}{8}i = \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{4}i$

3 Obtén polinomis les arrels dels quals siguin:

a) $2+\sqrt{3}i$ i $2-\sqrt{3}i$ **b) $-3i$ i $3i$** **c) $1+2i$ i $3-4i$**

(Observa que només quan les dues arrels són conjugades, el polinomi té coeficients reals).

a) $[x-(2+\sqrt{3}i)]\,[x-(2-\sqrt{3}i)] = [(x-2)-\sqrt{3}i]\,[(x-2)+\sqrt{3}i] = (x-2)^2 - (\sqrt{3}i)^2 =$

$= x^2 - 4x + 4 - 3i^2 = x^2 - 4x + 4 + 3 = x^2 - 4x + 7$

b) $[x-(-3i)]\,[x-3i] = [x+3i]\,[x-3i] = x^2 - 9i^2 = x^2 + 9$

c) $[x-(1+2i)]\,[x-(3-4i)] = [(x-1)-2i]\,[(x-3)+4i] =$

$= (x-1)(x-3) + 4(x-1)i - 2(x-3)i - 8i^2 =$

$= x^2 - 4x + 3 + (4x - 4 - 2x + 6)i + 8 = x^2 - 4x + 11 + (2x+2)i =$

$= x^2 - 4x + 11 + 2ix + 2i = x^2 + (-4+2i)x + (11+2i)$

4 Quant ha de valer x perquè $(25-xi)^2$ sigui imaginari pur?

$(25-xi)^2 = 625 + x^2i^2 - 50xi = (625 - x^2) - 50xi$

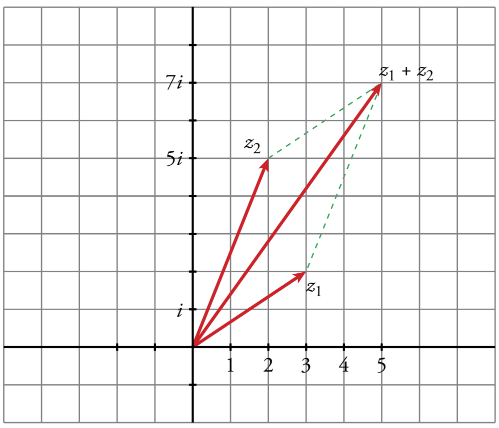
Perquè sigui imaginari pur:

$625 - x^2 = 0 \;\to\; x^2 = 625 \;\to\; x = \pm\sqrt{625} = \pm 25$

Hi ha dues solucions: $x_1 = -25$, $x_2 = 25$

5 Representa gràficament $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 2+5i$, $z_1 + z_2$. Comprova que $z_1 + z_2$ és una diagonal del paral·lelogram de costats z_1 i z_2.

$z_1 + z_2 = 5 + 7i$



3 Nombres complexos en forma polar

Pàgina 153

1 Cert o fals?

a) Els mòduls de dos nombres complexos oposats són iguals però amb signes diferents.

b) Els mòduls de dos complexos oposats són iguals.

c) Els mòduls de dos complexos conjugats són iguals.

d) Els arguments de dos nombres complexos oposats difereixen en 180°.

e) Els arguments de dos nombres complexos conjugats són oposats $(\alpha$ i $-\alpha)$.

f) L'argument de qualsevol nombre real és 0.

g) L'argument dels nombres reals negatius és 180°.

h) L'argument d'un imaginari pur és 90° o 270°.

a) Fals. El mòdul d'un nombre complex no nul sempre és un número positiu.

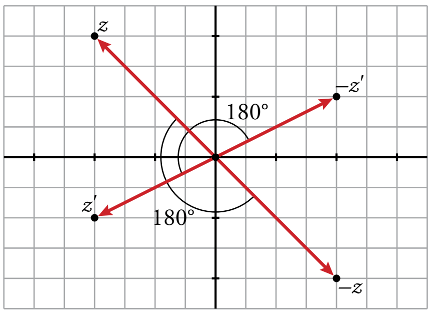
b) Cert.

Si $z = a + bi \rightarrow -z = -a - bi \rightarrow |-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

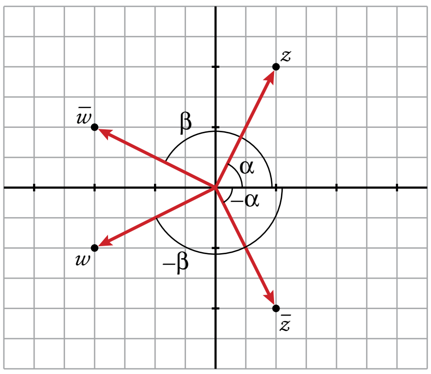
c) Cert.

Si $z = a + bi \rightarrow \overline{z} = a - bi \rightarrow |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

d) Cert. Podem veure-ho en el gràfic següent:



e) Cert. Podem veure-ho en el gràfic següent:



f) Fals. Només els nombres reales positius tenen argument 0°.

g) Cert, perquè els seus afixos són en l'eix horitzontal negatiu que forma 180° amb l'eix horitzontal positiu.

h) Cert, perquè el seu afix és en l'eix vertical que forma 90° amb l'eix horitzontal positiu, en el cas en què la part imaginària sigui positiva, i 270° en el cas que la part imaginària sigui negativa.

2 Escriu en forma polar els nombres complexos següents:

a) $1 + \sqrt{3}i$ **b)** $\sqrt{3} + i$ **c)** $-1 + i$

d) $5 - 12i$ **e)** $3i$ **f)** -5

a) $1 + \sqrt{3}i = 2_{60°}$ b) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$ c) $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

d) $5 - 12i = 13_{292°\,37'}$ e) $3i = 3_{90°}$ f) $-5 = 5_{180°}$

3 Escriu en forma binòmica els nombres complexos següents:

a) $5_{(\pi/6)\ \text{rad}}$ **b)** $2_{135°}$ **c)** $2_{495°}$

d) $3_{240°}$ **e)** $5_{180°}$ **f)** $4_{90°}$

a) $5_{(\pi/6)} = 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

b) $2_{135°} = 2(\cos 135° + i\sin 135°) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $2_{495°} = 2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

d) $3_{240°} = 3(\cos 240° + i\sin 240°) = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

e) $5_{180°} = -5$

f) $4_{90°} = 4i$

4 Expressa en forma polar l'oposat i el conjugat del nombre complex $z = r_\alpha$.

Oposat: $-z = r_{180° + \alpha}$

Conjugat: $\overline{z} = r_{360° - \alpha}$

5 Escriu en forma binòmica i en forma polar el complex:

$$z = 8(\cos 30° + i\sin 30°)$$

$z = 8_{30°} = 8(\cos 30° + i\sin 30°) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{2}i = 4\sqrt{3} + 4i$

6 Siguin els nombres complexos $z_1 = 4_{60°}$ i $z_2 = 3_{210°}$.

a) Expressa z_1 i z_2 en forma binòmica.

b) Troba $z_1 \cdot z_2$ i z_2/z_1, i passa els resultats a forma polar.

c) Compara els mòduls i els arguments de $z_1 \cdot z_2$ i de z_2/z_1 amb els de z_1 i z_2 i intenta trobar relacions entre ells.

a) $z_1 = 4_{60°} = 4(\cos 60° + i\sin 60°) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

$z_2 = 3_{210°} = 3(\cos 210° + i\sin 210°) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

b) $z_1 \cdot z_2 = (2 + 2\sqrt{3}i)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) = -3\sqrt{3} - 3i - 9i - 3\sqrt{3}i^2 = -3\sqrt{3} - 12i + 3\sqrt{3} = -12i = 12_{270°}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)}{(2 + 2\sqrt{3}i)} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)(2 - 2\sqrt{3}i)}{(2 + 2\sqrt{3}i)(2 - 2\sqrt{3}i)} = \frac{-3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}i^2}{4 - 12i^2} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} + 6i - 3\sqrt{3}}{4 + 12} = \frac{-6\sqrt{3} + 6i}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150°}$$

c) $z_1 \cdot z_2 = 4_{60°} \cdot 3_{210°} = (4 \cdot 3)_{60° + 210°} = 12_{270°}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3_{210°}}{4_{60°}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{210° - 60°} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150°}$$

4 Operacions amb complexos en forma polar

Pàgina 154

1 Cert o fals?

a) En multiplicar un nombre complex z per la unitat imaginària i, es gira 90° al voltant de l'origen.

b) En dividir z per i, es gira 90° al voltant de l'origen en el sentit de les agulles del rellotge.

c) El mòdul del producte $r_\alpha \cdot r'_\beta$ pot ser menor que r.

d) $(r_{45°})^4$ és un nombre real negatiu.

e) $r_{30°}$ i $r_{330°}$ són conjugats.

f) $r_{30°}$ i $r_{210°}$ són oposats.

a) Cert, perquè $i = 1_{90°}$. En multiplicar per i, mantenim el mòdul del nombre complex i sumem un angle de 90° al seu argument; és a dir, el girem 90° en el sentit contrari al de les agulles del rellotge.

b) Cert, perquè $i = 1_{90°}$. En dividir per i, mantenim el mòdul del nombre complex i restem un angle de 90° del seu argument; és a dir, el girem 90° en el sentit de les agulles del rellotge.

c) Cert. Si $r' < 1$ el mòdul del producte, que és $r \cdot r'$, és menor que r.

d) Cert. $(r_{45°})^4 = (r^4)_{4 \cdot 45°} = (r^4)_{180°}$ que és en la part negativa de l'eix real.

e) Cert. 330° = –30°. Per tant, són nombres complexos conjugats.

f) Cert. Els angles 210° i 30° es diferencien en 180°. Per tant, són nombres complexos oposats.

Pàgina 155

Fes-ho tu. Troba z_1/z_2; z_1^6; z_2^3.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4_{60°}}{3_{210°}} = \left(\frac{4}{3}\right)_{60° - 210°} = \left(\frac{4}{3}\right)_{-150°} = \left(\frac{4}{3}\right)_{210°}$$

$$z_1^6 = (4_{60°})^6 = (4^6)_{6 \cdot 60°} = 4\,096_{360°} = 4\,096_{0°}$$

$$z_2^3 = (3_{210°})^3 = (3^3)_{3 \cdot 210°} = 27_{630°} = 27_{270°}$$

2 Efectua aquestes operacions i dóna'n el resultat en forma polar i en forma binòmica:

a) $1_{150°} \cdot 5_{30°}$
b) $6_{45°} : 3_{15°}$
c) $2_{10°} \cdot 1_{40°} \cdot 3_{70°}$
d) $5_{(2\pi/3)\ rad} : 1_{60°}$
e) $(1 - \sqrt{3}\,i)^5$
f) $(3 + 2i) + (-3 + 2i)$

a) $1_{150°} \cdot 5_{30°} = 5_{180°} = -5$

b) $6_{45°} : 3_{15°} = 2_{30°} = 2\,(\cos 30° + i \sin 30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

c) $2_{10°} \cdot 1_{40°} \cdot 3_{70°} = 6_{120°} = 6\,(\cos 120° + i \sin 120°) = 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3\sqrt{3}\,i$

d) $5_{(2\pi/3)\,rad} : 1_{60°} = 5_{120°} : 1_{60°} = 5_{60°} = 5\,(\cos 60° + i \sin 60°) = 5\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

e) $(1 - \sqrt{3}\,i)^5 = (2_{300°})^5 = 32_{1500°} = 32_{60°} = 32\,(\cos 60° + i \sin 60°) = 32\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}\,i$

f) $4i = 4_{90°}$

3 **Compara els resultats en cada cas.**

a) $(2_{30^\circ})^3$, $(2_{150^\circ})^3$, $(2_{270^\circ})^3$

b) $(2_{60^\circ})^4$, $(2_{150^\circ})^4$, $(2_{270^\circ})^4$, $(2_{330^\circ})^4$

a) $(2_{30^\circ})^3 = 2^3_{3\cdot 30^\circ} = 8_{90^\circ}$

$(2_{150^\circ})^3 = 2^3_{3\cdot 150^\circ} = 8_{450^\circ} = 8_{90^\circ}$

$(2_{270^\circ})^3 = 8_{3\cdot 270^\circ} = 8_{810^\circ} = 8_{90^\circ}$

b) $(2_{60^\circ})^4 = 2^4_{4\cdot 60^\circ} = 16_{240^\circ}$

$(2_{150^\circ})^4 = 16_{600^\circ} = 16_{240^\circ}$

$(2_{270^\circ})^4 = 16_{1\,080^\circ} = 16_{0^\circ}$

$(2_{330^\circ})^4 = 16_{1\,320^\circ} = 16_{240^\circ}$

4 **Donats els complexos $z = 5_{45^\circ}$, $w = 2_{15^\circ}$ i $t = 4i$, obtén en forma polar:**

a) $z \cdot t$ **b)** $\dfrac{z}{w^2}$ **c)** $\dfrac{z^3}{w \cdot t^2}$ **d)** $\dfrac{z \cdot w^3}{t}$

$z = 5_{45^\circ}$ $w = 2_{15^\circ}$ $t = 4i = 4_{90^\circ}$

a) $z \cdot w = 10_{60^\circ}$

b) $\dfrac{z}{w^2} = \dfrac{z}{4_{30^\circ}} = \dfrac{5_{45^\circ}}{4_{30^\circ}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)_{15^\circ}$

c) $\dfrac{z^3}{w \cdot t^2} = \dfrac{125_{135^\circ}}{2_{15^\circ} \cdot 16_{180^\circ}} = \left(\dfrac{125}{32}\right)_{-60^\circ} = \left(\dfrac{125}{32}\right)_{300^\circ}$

d) $\dfrac{z \cdot w^3}{t} = \dfrac{5_{45^\circ} \cdot 8_{45^\circ}}{4_{90^\circ}} = 10_{0^\circ} = 10$

5 **Expressa $\cos 3\alpha$ i $\sin 3\alpha$ en funció de $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ usant la fórmula de Moivre. Tingues en compte que:**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$(1_\alpha)^3 = 1\,(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos^3 \alpha + i\,3 \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3\,i^2 \cos \alpha \sin^2 \alpha + i^3 \sin^3 \alpha =$

$= \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha\, i - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha =$

$= (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha) + (3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha)\, i$

Per altra part: $(1_\alpha)^3 = 1_{3\alpha} = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$

Per tant: $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$

$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$

5 Radicació de nombres complexos

Pàgina 157

1 **Cert o fals?**

a) Els nombres reals negatius no tenen arrels quadrades en el camp complex.

b) El real –9 té dues arrels imaginàries pures: $3i$ i $-3i$.

c) El nombre 16 té dues arrels quartes reals, 2 i –2, i unes altres dues d'imaginàries pures, $2i$ i $-2i$.

d) Cap de les quatre arrels quartes de –16 no és un nombre real.

e) El nombre –8 té una arrel cúbica real, el –2. Les altres dues arrels cúbiques són nombres imaginaris conjugats.

f) $2_{84°}$ és una arrel cinquena de $32_{60°}$.

a) Fals. Les arrels quadrades dels nombres reals negatius són nombres complexos imaginaris purs.

b) Cert. Perquè $(3i)^2 = 3^2 i^2 = -9$ y $(-3i)^2 = (-3)^2 i^2 = -9$.

c) Cert. Perquè $2^4 = 16$, $(-2)^4 = 16$, $(2i)^4 = 2^4 i^4 = 16$ y $(-2i)^4 = (-2)^4 i^4 = 16$.

d) Cert. La potència quarta d'un nombre real no nul sempre és un nombre positiu i no pot donar mai –16.

e) Cert. Les arrels estan en els vèrtexs d'un triangle equilàter i són $2_{60°}$, $-2 = 2_{180°}$ i $2_{300°}$.

Com que els angles 300° i 60° són oposats perquè 300° = 360° – 60°, els corresponents nombres són conjugats.

f) Cert: $(2_{84°})^5 = (2^5)_{5 \cdot 84°} = 32_{420°} = 32_{60°}$

2 **Troba les sis arrels sisenes d'1. Representa-les i expressa-les en forma binòmica.**

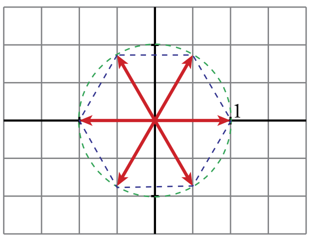
$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0°}} = 1_{(360° \cdot k)/6} = 1_{60° \cdot k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Les sis arrels són:

$1_{0°} = 1$ $\quad 1_{60°} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad 1_{120°} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$1_{180°} = -1$ $\quad 1_{240°} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad 1_{300°} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Representació



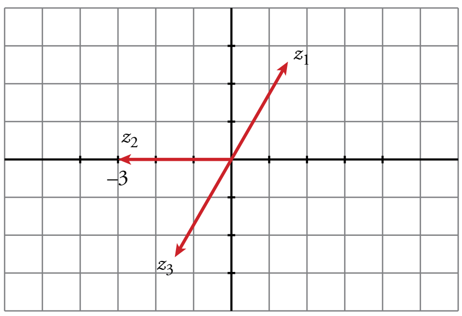
3 **Resol $z^3 + 27 = 0$. Representa'n les solucions.**

$z^3 + 27 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180°}} = 3_{(180° + 360° n)/3} = 3_{60° + 120° n}$; $n = 0, 1, 2$

$z_1 = 3_{60°} = 3(\cos 60° + i \sin 60°) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = 3_{180°} = -3$

$z_3 = 3_{240°} = 3(\cos 240° + i \sin 240°) = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$



4 **Resol aquestes equacions:**

a) $z^4 + 1 = 0$ **b)** $z^6 + 64 = 0$

a) $z^4 + 1 = 0 \rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_{180^\circ}} = 1_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = 1_{45^\circ + 90^\circ k};\ k = 0, 1, 2, 3$

Les quatre arrels són:

$1_{45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ 1_{135^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ 1_{225^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ 1_{315^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $z^6 + 64 = 0 \rightarrow z = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/6} = 2_{30^\circ + 60^\circ k};\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Les sis arrels són:

$2_{30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + 1$ $2_{90^\circ} = 2i$

$2_{150^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$ $2_{210^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$

$2_{270^\circ} = -2i$ $2_{330^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$

5 **Calcula.**

a) $\sqrt[3]{-i}$ **b)** $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$ **c)** $\sqrt{-25}$ **d)** $\sqrt{\frac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}}$

a) $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}} = 1_{(270^\circ + 360^\circ k)/3};\ k = 0, 1, 2$

Les tres arrels són:

$1_{90^\circ} = i$ $1_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ $1_{330^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{16_{120^\circ}} = 2_{(120^\circ + 360^\circ k)/4} = 2_{30^\circ + 90^\circ k};\ k = 0, 1, 2, 3$

Les quatre arrels són:

$2_{30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$ $2_{120^\circ} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i$

$2_{210^\circ} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i$ $2_{300^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$

c) $\sqrt{-25} = \sqrt{25_{180^\circ}} = 5_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = 5_{90^\circ + 180^\circ k};\ k = 0, 1$

Les dues arrels són: $5_{90^\circ} = 5i;\ 5_{270^\circ} = -5i$

d) $\sqrt[3]{\frac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}_{135^\circ}}{2_{60^\circ}}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{75^\circ}} = \sqrt[6]{2}_{(75^\circ + 360^\circ k)/3} = \sqrt[6]{2}_{25^\circ + 120^\circ k};\ k = 0, 1, 2$

Les tres arrels són: $\sqrt[6]{2}_{25^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{145^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{265^\circ}$

6 **Comprova que si z i w són dues arrels sisenes d'1, aleshores també ho són els resultats de les operacions següents:**

$$z \cdot w,\ \frac{z}{w},\ z^2,\ z^3$$

z i w arrels sisenes d'1 $\rightarrow z^6 = 1,\ w^6 = 1$

$(z \cdot w)^6 = z^6 \cdot w^6 = 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow z \cdot w$ és arrel sisena d'1.

$\left(\frac{z}{w}\right)^6 = \frac{z^6}{w^6} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \frac{z}{w}$ és arrel sisena d'1.

$z^2 = (z^2)^6 = z^{12} = (z^4)^3 = 1^3 = 1 \rightarrow z^2$ és arrel sisena d'1.

$z^3 = (z^3)^6 = z^{18} = z^{16} \cdot z^2 = (z^4)^4 \cdot z^2 = 1^4 \cdot 1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow z^3$ és arrel sisena d'1.

7 **El nombre $4+3i$ és l'arrel quarta d'un cert nombre complex, z. Troba les altres tres arrels quartes de z.**

$4+3i = 5_{36°\,52'}$

Les altres tres arrels quartes de z seran:

$5_{36°\,52'+90°} = 5_{126°\,52'} = -3+4i$

$5_{36°\,52'+180°} = 5_{216°\,52'} = -4-3i$

$5_{36°\,52'+270°} = 5_{306°\,52'} = 3-4i$

8 **Calcula les arrels següents i representa'n gràficament les solucions:**

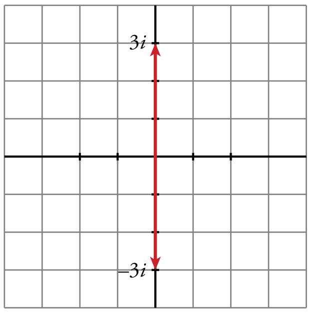
a) $\sqrt{-9}$ **b)** $\sqrt[3]{-27}$ **c)** $\sqrt[3]{2-2i}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}}$ **e)** $\sqrt[5]{\dfrac{-32}{i}}$ **f)** $\sqrt[3]{8i}$

a) $\sqrt{-9} = \sqrt{9_{180°}} = 3_{(180°+360°\,k)/2} = 3_{90°+180°\,k};\ k=0,1$

Les dues arrels són:

$3_{90°} = 3i;\ 3_{270°} = -3i$



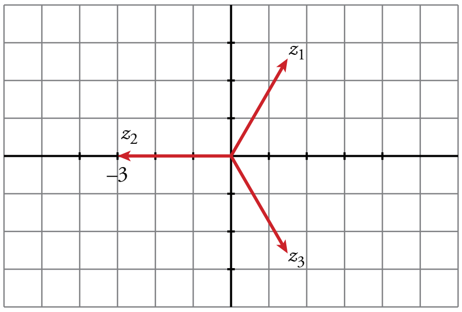
b) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180°}} = 3_{(180°+360°\,k)/3} = 3_{60°+120°\,k};\ k=0,1,2$

Les tres arrels són:

$z_1 = 3_{60°} = 3\,(cos\ 60° + i\ sin\ 60°) = 3\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = 3_{180°} = -3$

$z_3 = 3_{300°} = 3\,(cos\ 300° + i\ sin\ 300°) = 3\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$



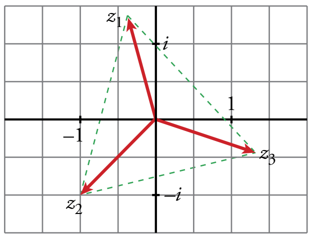
c) $\sqrt[3]{2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{315°}} = \sqrt{2}_{(315°+360°\,k)/3} = \sqrt{2}_{105°+120°\,k};\ k = 0,\ 1,\ 2$

Les tres arrels són:

$z_1 = \sqrt{2}_{105°} = -0,37 + 1,37i$

$z_2 = \sqrt{2}_{225°} = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1-i$

$z_3 = \sqrt{2}_{345°} = 1,37 - 0,37i$



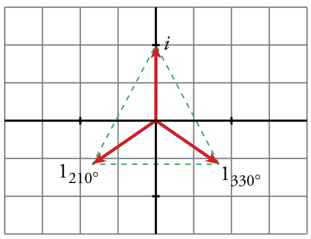
d) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}_{315°}}{\sqrt{2}_{45°}}} = \sqrt[3]{1_{270°}} = 1_{(270°+360°\,k)/3} = 1_{90°+120°\,k};\ k = 0,\ 1,\ 2$

Les tres arrels són:

$1_{90°} = i$

$1_{210°} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

$1_{330°} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$



e) $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{i}} = \sqrt[5]{-\dfrac{32(-i)}{i(-i)}} = \sqrt[5]{32i} = \sqrt[5]{32_{90^\circ}} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/5} = 2_{18^\circ + 72^\circ k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Les cinc arrels són:

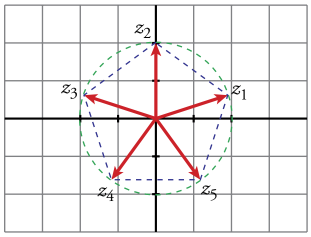
$z_1 = 2_{18^\circ} = 1,9 + 0,6i$

$z_2 = 2_{90^\circ} = 2i$

$z_3 = 2_{162^\circ} = -1,9 + 0,6i$

$z_4 = 2_{234^\circ} = -1,2 - 1,6i$

$z_5 = 2_{306^\circ} = 1,2 - 1,6i$



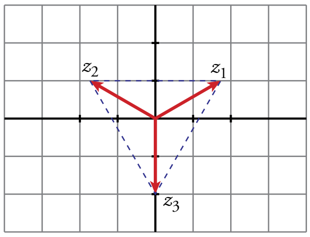
f) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{30^\circ + 120^\circ k}$; $k = 0, 1, 2$

Les tres arrels són:

$z_1 = 2_{30^\circ}$

$z_2 = 2_{150^\circ}$

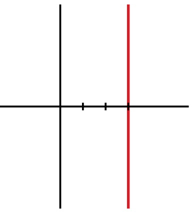
$z_3 = 2_{270^\circ}$

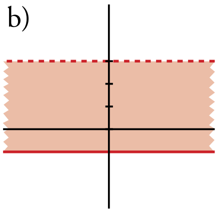


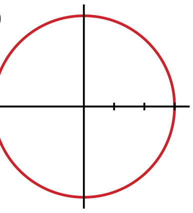
6 Descripcions gràfiques amb nombres complexos

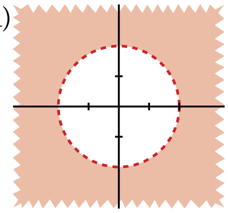
Pàgina 158

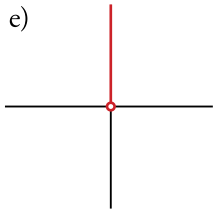
1 **Descriu amb paraules cada una de les famílies («són els nombres complexos la part real dels quals val...»), escriu-ne l'equació o inequació (usant *Re*, *Im*, | |, *arg*) i troba un representant de cada una.**

a) 

b) 

c) 

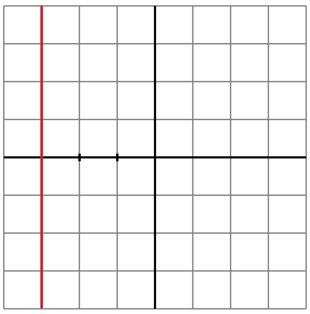
d) 

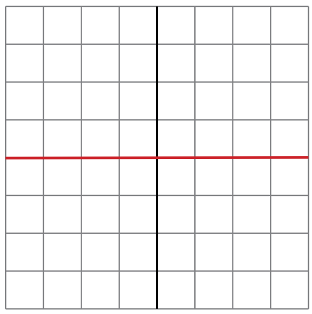
e) 

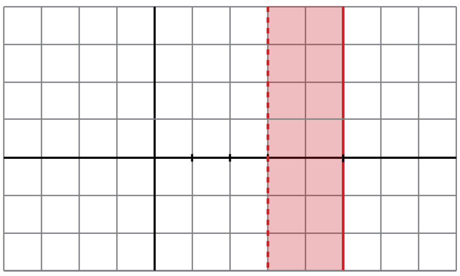
a) $Re\ z = 3$ b) $-1 \le Im\ z < 3$ c) $|z| = 3$ d) $|z| > 2$ e) $Arg\ z = 90°$

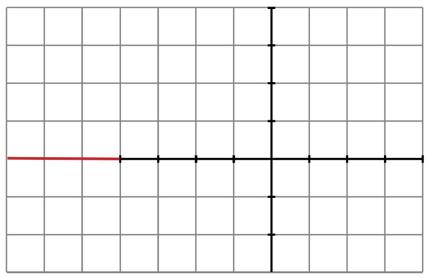
2 **Representa.**

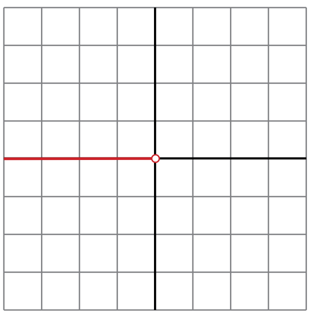
a) $Re\ (z) = -3$ **b)** $Im\ (z) = 0$ **c)** $3 < Re\ (z) \le 5$ **d)** $|z| < 4$ **e)** $Arg\ z = 180°$

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 159

1. Operacions amb nombres complexos en forma binòmica

Fes-ho tu. **Calcula el valor de a i b perquè es verifiqui $a - 3i = \dfrac{1+bi}{5-3i}$.**

Calculem el segon membre de la igualtat.

$$\frac{1+bi}{5-3i} = \frac{(1+bi)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{5+3i+5bi+3bi^2}{25+9} = \frac{5-3b+(3+5b)i}{34}$$

Igualem les parts real i imaginària.

$$\begin{cases} a = \dfrac{5-3b}{34} \\ -3 = \dfrac{3+5b}{34} \end{cases} \to -102 = 3+5b \to b = -21$$

$$a = \frac{5-3b}{34} \to a = \frac{5-3(-21)}{34} \to a = 2$$

2. Nombres complexos conjugats

Fes-ho tu. **El producte de dos nombres complexos conjugats és 48_{0° i l'argument del seu coeficient és 60°. Troba'ls.**

Anomenem r_α i $r_{-\alpha}$ els dos nombres complexos conjugats que busquem.

$$r_\alpha \cdot r_{-\alpha} = 48_{0^\circ} \to \begin{cases} r^2 = 48^\circ \\ \alpha - \alpha = 0^\circ \end{cases} \to r = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$r_\alpha / r_{-\alpha} = 1_{2\alpha} \to 2\alpha = 60^\circ \to \alpha = 30^\circ$$

Per tant, els nombres són:

$$z_1 = (4\sqrt{3})_{30^\circ}$$

$$z_2 = (4\sqrt{3})_{-30^\circ} = (4\sqrt{3})_{330^\circ}$$

3. Relacions entre les raons trigonomètriques d'un angle i els nombres complexos

Fes-ho tu. **Troba $sin\ 15^\circ$ i $cos\ 15^\circ$ a partir del quocient $1_{45^\circ} : 1_{30^\circ}$.**

$$1_{45^\circ} : 1_{30^\circ} = 1_{15^\circ} = 1\,(cos\ 15^\circ + i\ sin\ 15^\circ) = cos\ 15^\circ + i\ sin\ 15^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} 1_{45^\circ} = 1\,(cos\ 45^\circ + i\ sin\ 45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ 1_{30^\circ} = 1\,(cos\ 30^\circ + i\ sin\ 30^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \end{array}\right\} \to$$

$$\to \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i+\sqrt{6}i+\sqrt{2}}{3+1} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}{4}$$

Per tant:

$$cos\ 15^\circ + i\ sin\ 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \to \begin{cases} cos\ 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ sin\ 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Pàgina 160

4. Operacions amb nombres complexos en forma polar

Fes-ho tu. **Calcula i representa les solucions de $\sqrt[4]{(-2+2\sqrt{3}\,i)^3}$.**

Passem $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ a forma polar tenint en compte que es troba en el segon quadrant.

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

$tg\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120°$

Ara calculem $z^3 = (4_{210°})^3 = (4^3)_{3\,\cdot\,120°} = 64_{360°} = 64_{0°}$

Les arrels quartes buscades són:

$\sqrt[4]{64_{0°}} = \sqrt[4]{64}_{\frac{0\cdot 360k}{4}};\ k = 0, 1, 2, 3$

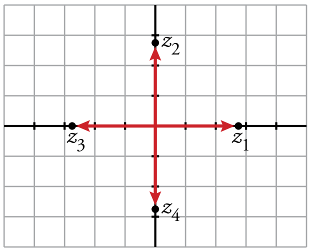
Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2\sqrt{2}_{0°} = 2\sqrt{2}\,(cos\,0° + i\,sin\,0°) = 2\sqrt{2}$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2\sqrt{2}_{90°} = 2\sqrt{2}\,(cos\,90° + i\,sin\,90°) = 2\sqrt{2}\,i$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2\sqrt{2}_{180°} = 2\sqrt{2}\,(cos\,180° + i\,sin\,180°) = -2\sqrt{2}$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2\sqrt{2}_{270°} = 2\sqrt{2}\,(cos\,270° + i\,sin\,270°) = -2\sqrt{2}\,i$

La representació gràfica de les arrels és:



5. Resolució d'equacions en ℂ

Fes-ho tu. **Resol les equacions següents en ℂ:**

a) $z^4 + 1 = 0$

b) $iz + 3i - 2 = 1 + i$

a) $z^4 + 1 = 0 \rightarrow z^4 = -1 \rightarrow z = \sqrt[4]{-1}$

$-1 = 1_{180°}$. Per tant, $z = \sqrt[4]{1_{180°}} = 1_{(180+360k)/4};\ k = 0, 1, 2, 3$

Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 1_{45°} = 1\,(cos\,45° + i\,sin\,45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 1_{135°} = 1\,(cos\,135° + i\,sin\,135°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 1_{225°} = 1\,(cos\,225° + i\,sin\,225°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 1_{315°} = 1\,(cos\,315° + i\,sin\,315°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $iz + 3i - 2 = 1 + i \rightarrow iz = 1 + i - 3i + 2 \rightarrow iz = 3 - 2i \rightarrow z = \dfrac{3-2i}{i} = \dfrac{(3-2i)\,i}{i\cdot i} = -2 - 3i$

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 161

1. Nombres reals i nombres imaginaris

Troba el valor que ha de tenir x perquè el quocient $\frac{1+3xi}{3-4i}$ sigui:

a) Un nombre real.

b) Un nombre imaginari pur.

$$\frac{1+3xi}{3-4i}=\frac{(1+3xi)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3+4i+9xi+12\,xi^2}{9+16}=\frac{3-12x+(4+9x)\,i}{25}$$

a) Perquè sigui real, la part imaginària ha de ser 0.

$$4+9x=0 \;\rightarrow\; x=-\frac{9}{4}$$

b) Perquè sigui imaginari pur, la part real ha de ser 0.

$$3-12x=0 \;\rightarrow\; x=\frac{1}{4}$$

2. Nombres complexos que compleixen certes condicions

Troba un nombre complex que tingui el mateix mòdul que $4\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$ i l'afix del qual estigui en la bisectriu del primer o tercer quadrant.

El nombre buscat ha de ser de la forma $a + ai$ perquè estigui en la bisectriu del primer o tercer quadrant.

$$|a+ai|=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}$$

$$|4\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i|=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2}=5\sqrt{2}$$

Aleshores:

$$\sqrt{2a^2}=5\sqrt{2} \;\rightarrow\; 2a^2=50 \;\rightarrow\; a^2=25 \;\rightarrow\; \begin{cases} a_1=5 \\ a_2=-5 \end{cases}$$

Per tant, els nombres complexos buscats són $z_1 = 5 + 5i$ i $z_2 = -5 - 5i$.

3. Suma de nombres complexos expressats en forma polar

Calcular:

$$\mathbf{2_{\frac{\pi}{6}}-\sqrt{3}_{\pi}+3_{\frac{3\pi}{2}}}$$

$$2_{\frac{\pi}{6}}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$$

$$\sqrt{3}_{\pi}=\sqrt{3}\,(\cos\pi+i\sin\pi)=-\sqrt{3}$$

Per tant:

$$2_{\frac{\pi}{6}}-\sqrt{3}_{\pi}+3_{\frac{3\pi}{2}}=\sqrt{3}+i-(-\sqrt{3})+(-3i)=2\sqrt{3}-2i \quad \text{(que és en el quart quadrant)}$$

$$|2\sqrt{3}-2i|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4$$

$$tg\,\alpha=\frac{-2}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; \alpha=330^\circ=\frac{11\pi}{6}\text{ rad}$$

4. Potència i arrels de nombres complexos

Una de les arrels sisenes d'un nombre complex z és $-\sqrt{3}+i$. Calcula z i l'àrea de l'hexagon els vèrtexs del qual són els afixos de les arrels sisenes de z. Troba aquests afixos.

Como que $z = (-\sqrt{3}+i)^6$, passem a forma polar el número $-\sqrt{3}+i$, que és en el segon quadrant.

$$|-\sqrt{3}+i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = 2$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 150°$$

$$z = (2_{150°})^6 = (2^6)_{6\cdot 150°} = 64_{900°} = 64_{180°}$$

$$\sqrt[6]{64_{180°}} = \sqrt[6]{64}_{(180\cdot 360k)/6};\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Les arrels i els afixos són:

Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{30°} = 2\,(cos\,30° + i\,sin\,30°) = \sqrt{3}+i \rightarrow A(\sqrt{3},1)$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{90°} = 2\,(cos\,90° + i\,sin\,90°) = 2i \rightarrow B(0,2)$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{150°} = 2\,(cos\,150° + i\,sin\,150°) = -\sqrt{3}+i \rightarrow C(-\sqrt{3},1)$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{210°} = 2\,(cos\,210° + i\,sin\,210°) = -\sqrt{3}-i \rightarrow D(-\sqrt{3},-1)$

Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{270°} = 2\,(cos\,270° + i\,sin\,270°) = -2i \rightarrow E(0,-2)$

Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{330°} = 2\,(cos\,330° + i\,sin\,330°) = \sqrt{3}-i \rightarrow F(\sqrt{3},-1)$

La longitud del costat de l'hexàgon és igual al radi de la circumferència circumscrita, que és igual al mòdul de qualsevol de les arrels; és a dir, 2. L'apotema de l'hexàgon regular és $2\cdot cos\,30° = \sqrt{3}$.

Per tant, l'àrea de l'hexàgon és:

$$A = \frac{\text{perímetre}\cdot\text{apotema}}{2} = \frac{6\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ \text{u}^2$$

5. Interpretació gràfica d'igualtats amb nombres complexos

Representa, en cada cas, els nombres complexos que compleixen la condició donada.

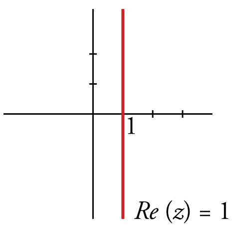
a) $z + \bar{z} = 2$ ***b)*** $z - \bar{z} = -4i$ ***c)*** $|z| = 3$

a) Si $z = a+bi \rightarrow a+bi+a-bi = 2 \rightarrow 2a = 2 \rightarrow a = 1 \rightarrow Re(z) = 1$ i s'obté la figura a).

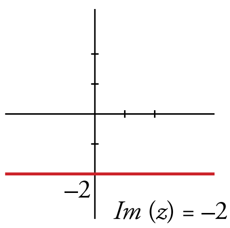
b) Si $z = a+bi \rightarrow a+bi-(a-bi) = -4i \rightarrow 2bi = -4i \rightarrow 2b = -4 \rightarrow b = -2 \rightarrow Im\,(z) = -2$ i s'obté la figura b).

c) Com que $|z| = 3$ i l'argument pot ser qualsevol, s'obté la circumferència de radi 3.

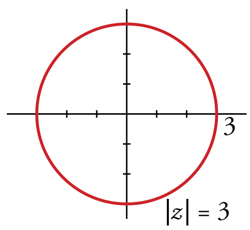
a)



b)



c)



Exercicis i problemes proposats

Pàgina 162

Per practicar

Nombres complexos en forma binòmica. Operacions

1 **Calcula.**

a) $(3+2i)(2-i)-(1-i)(2-3i)$

b) $3+2i(-1+i)-(5-4i)$

c) $-2i-(4-i)5i$

d) $(4-3i)(4+3i)-(4-3i)^2$

a) $(3+2i)(2-i)-(1-i)(2-3i) = 6-3i+4i-2i^2-2+3i+2i-3i^2 =$

$= 6-3i+4i+2-2+3i+2i+3 = 9+6i$

b) $3+2i(-1+i)-(5-4i) = 3-2i+2i^2-5+4i = 3-2i-2-5+4i = -4+2i$

c) $-2i-(4-i)5i = -2i-20i+5i^2 = -22i-5 = -5-22i$

d) $(4-3i)(4+3i)-(4-3i)^2 = 16-(3i)^2-16-9i^2+24i = 16+9-16+9+24i = 18+24i$

2 **Els punts** A, B, C, D **corresponen als afixos dels nombres complexos** z_1, z_2, z_3, z_4.

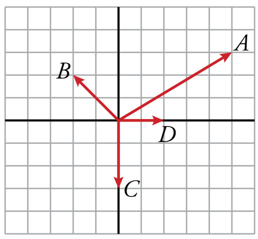
Efectua i representa.

a) $z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3$

b) $(z_2 - z_1)^2$

c) $\dfrac{5(z_1 - z_4)}{z_2 + z_3}$

d) $\dfrac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{z_3 + z_4}$



$z_1 = 5+3i \qquad z_2 = -2+2i \qquad z_3 = -3i \qquad z_4 = 2$

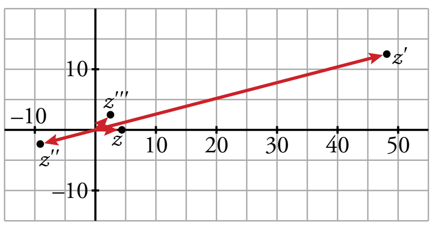
a) $z = z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3 = (5+3i)2-(-2+2i)(-3i) = 10+6i-6i+6i^2 = 4$

b) $z' = (z_2 - z_1)^2 = [-2+2i-(5+3i)]^2 = (-7-i)^2 = 49+14i+i^2 = 48+14i$

c) $z'' = \dfrac{5(z_1-z_4)}{z_2+z_3} = \dfrac{5(5+3i-2)}{-2+2i+(-3i)} = \dfrac{5(3+3i)}{-2-i} = \dfrac{(15+15i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \dfrac{-30+15i-30i+15i^2}{4+1} = -9-3i$

d) $z''' = \dfrac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{z_3+z_4} = \dfrac{5-3i-(-2-2i)}{2-3i} = \dfrac{(7-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{14+21i-2i-3i^2}{4+9} = \dfrac{18+19i}{13}$

Representació gràfica:



3 **Calcula en forma binòmica.**

a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}$ b) $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}$ c) $\dfrac{2+5i}{3-2i}(1-i)$ d) $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{-3-2i}{1+3i}$

a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}=\dfrac{12-6i+12i-6i^2}{2-2i}=\dfrac{18+6i}{2-2i}=\dfrac{(18+6i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}=$

$=\dfrac{36+36i+12i-12}{4+4}=\dfrac{24+48i}{8}=3+6i$

b) $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}=\dfrac{-2+3i}{-4+4i-2i-2}=\dfrac{-2+3i}{-6+2i}=\dfrac{(-2+3i)(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)}=$

$=\dfrac{12+4i-18i+6}{36+4}=\dfrac{18-14i}{40}=\dfrac{9-7i}{20}=\dfrac{9}{20}-\dfrac{7}{20}i$

c) $\dfrac{2+5i}{3-2i}(1-i)=\dfrac{2-2i+5i+5}{3-2i}=\dfrac{7+3i}{3-2i}=\dfrac{(7+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{21+14i+9i-6}{9+4}=\dfrac{15+23i}{13}=\dfrac{15}{13}+\dfrac{23}{13}i$

d) $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{-3-2i}{1+3i}=\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\dfrac{(-3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{2+i+2i-1}{4+1}+\dfrac{-3+9i-2i-6}{1+9}=$

$=\dfrac{1+3i}{5}+\dfrac{-9+7i}{10}=\dfrac{2+6i-9+7i}{10}=\dfrac{-7+13i}{10}=\dfrac{-7}{10}+\dfrac{13}{10}i$

4 **Donats els nombres complexos $z=1-3i$, $w=-3+2i$, $t=-2i$, calcula:**

a) zwt b) $zt-w(t+z)$ c) $\dfrac{w}{z}t$

d) $\dfrac{2z-3t}{w}$ e) $\dfrac{3z+it}{3}w$ f) $\dfrac{z^2-wt^2}{2}$

$z=1-3i;\ w=-3+2i;\ t=-2i$

a) $zwt=(1-3i)(-3+2i)(-2i)=(-3+2i+9i-6i^2)(-2i)=(3+11i)(-2i)=-6i-22i^2=22-6i$

b) $zt-w(t+z)=(1-3i)(-2i)-(-3+2i)(-2i+1-3i)=(-2i+6i^2)-(-3+3i)(1-5i)=$

$=(-6-2i)-(-3+2i)(1-5i)=(-6-2i)-(-3+15i+2i-10i^2)=$

$=(-6-2i)-(7+17i)=-13-19i$

c) $\dfrac{w}{z}t=\dfrac{-3+2i}{1-3i}(-2i)=\dfrac{6i-4i^2}{1-3i}=\dfrac{(4+6i)(1+3i)}{1^2-(3i)^2}=\dfrac{4+12i+6i+18i^2}{1+9}=$

$=\dfrac{-14+18i}{10}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{9}{5}i$

d) $\dfrac{2z-3t}{w}=\dfrac{2(1-3i)-3(-2i)}{-3+2i}=\dfrac{2-6i+6i}{-3+2i}=\dfrac{2(-3-2i)}{(-3)^2-(2i)^2}=\dfrac{-6-4i}{9+4}=-\dfrac{6}{13}-\dfrac{4}{13}i$

e) $\dfrac{3z+it}{3}w=\dfrac{3(1-3i)+i(-2i)}{3}(-3+2i)=\dfrac{3-9i+2}{3}(-3+2i)=$

$=\left(\dfrac{5}{3}-3i\right)(-3+2i)=-5+\dfrac{10}{3}i+9i-6i^2=1+\dfrac{37}{3}i$

f) $\dfrac{z^2-wt^2}{2}=\dfrac{(1-3i)^2-(-3+2i)(-2i)^2}{2}=\dfrac{1-6i+9i^2-(-3+2i)(-4)}{2}=$

$=\dfrac{-8-6i-12+8i}{2}=\dfrac{-20}{2}+\dfrac{2}{2}i=-10+i$

5 **Calcula.**

a) i^{37} **b)** i^{126} **c)** i^{-7} **d)** i^{64} **e)** i^{-216}

a) $i^{37} = i^1 = i$ b) $i^{126} = i^2 = -1$ c) $i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{-i} = i$ d) $i^{64} = i^0 = 1$ e) $i^{-216} = \frac{1}{i^{216}} = \frac{1}{i^0} = \frac{1}{1} = 1$

6 **Donat el nombre complex** $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$**, prova que:**

a) $1 + z + z^2 = 0$ **b)** $\frac{1}{z} = z^2$

a) $z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$1 + z + z^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

b) $\frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)} =$

$= \frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{1+3} = \frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (ho havíem calculat en a).

Per tant; $\frac{1}{z} = z^2$.

7 **Calcula** m **i** n **perquè es verifiqui la igualtat** $(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$**.**

$(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$

$(2 + n) + (m + 5)i = 7 - 2i \rightarrow \begin{cases} 2 + n = 7 \\ m + 5 = -2 \end{cases} \begin{matrix} n = 5 \\ m = -7 \end{matrix}$

8 **Determina** k **perquè el quocient** $\frac{k+i}{1+i}$ **sigui igual a** $2 - i$**.**

$\frac{k+i}{1+i} = \frac{(k+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{k-ki+i+1}{1+1} = \frac{(k+1)+(1-k)i}{2} = \left(\frac{k+1}{2}\right) + \left(\frac{1-k}{2}\right)i = 2 - i \rightarrow \begin{cases} \frac{k+1}{2} = 2 \rightarrow k = 3 \\ \frac{1-k}{2} = -1 \rightarrow k = 3 \end{cases}$

Per tant, $k = 3$.

9 **Donats els complexos** $2 - ai$ **i** $3 - bi$**, troba** a **i** b **perquè el seu producte sigui igual a** $8 + 4i$**.**

$(2 - ai)(3 - bi) = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai + abi^2 = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai - ab = 8 + 4i$

$(6 - ab) + (-2b - 3a)i = 8 + 4i$

$\begin{cases} 6 - ab = 8 \\ -2b - 3a = 4 \end{cases}$

$b = \frac{4 + 3a}{-2}$

$6 - a\left(\frac{4+3a}{-2}\right) = 8 \rightarrow 6 + \frac{4a + 3a^2}{2} = 8$

$\frac{4a + 3a^2}{2} = 2 \rightarrow 4a + 3a^2 = 4 \rightarrow 3a^2 + 4a - 4 = 0$

$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} \begin{cases} a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow b = -3 \\ a = \frac{-12}{6} = -2 \rightarrow b = 1 \end{cases}$

Nombres complexos en forma polar

10 **Representa aquests nombres complexos, els oposats i els conjugats. Expressa'ls en forma polar:**

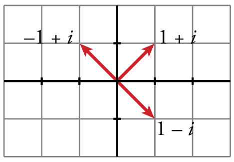
a) $1 - i$ **b)** $-1 + i$ **c)** $\sqrt{3} + i$ **d)** $-\sqrt{3} - i$

e) -4 **f)** $2i$ **g)** $-\frac{3}{4}i$ **h)** $2 + 2\sqrt{3}i$

a) $1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

Oposat: $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

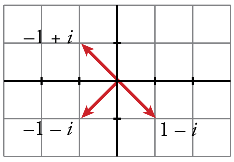
Conjugat: $1 + i = \sqrt{2}_{45°}$



b) $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

Oposat: $1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

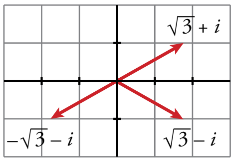
Conjugat: $-1 - i = \sqrt{2}_{225°}$



c) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

Oposat: $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

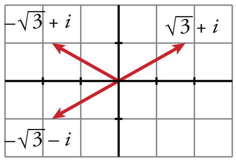
Conjugat: $\sqrt{3} - i = 2_{330°}$



d) $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

Oposat: $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

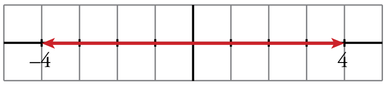
Conjugat: $-\sqrt{3} + i = 2_{150°}$



e) $-4 = 4_{180°}$

Oposat: $4 = 4_{0°}$

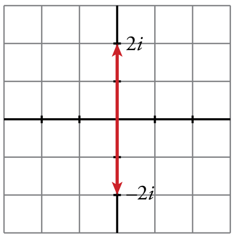
Conjugat: $-4 = 4_{180°}$



f) $2i = 2_{90°}$

Oposat: $-2i = 2_{270°}$

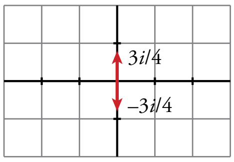
Conjugat: $-2i = 2_{270°}$



g) $-\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{270°}$

Oposat: $\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90°}$

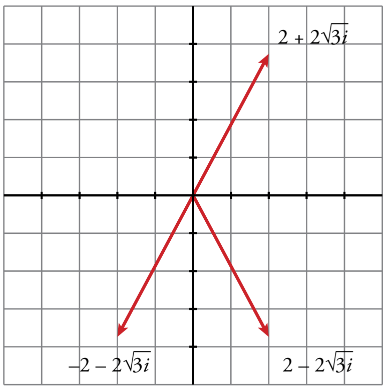
Conjugat: $\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90°}$



h) $2 + 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{60°}$

Oposat: $-2 - 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{240°}$

Conjugat: $2 - 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{300°}$



11 **Escriu en forma binòmica aquests nombres complexos:**

a) $2_{45°}$ **b)** $3_{(\pi/6)}$ **c)** $\sqrt{2}_{180°}$ **d)** $17_{0°}$
e) $1_{(\pi/2)}$ **f)** $5_{270°}$ **g)** $1_{150°}$ **h)** $4_{100°}$

a) $2_{45°} = 2\,(cos\,45° + i\,sin\,45°) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

b) $3_{(\pi/6)} = 3\left(cos\,\frac{\pi}{6} + i\,sin\,\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

c) $\sqrt{2}_{180°} = \sqrt{2}\,(cos\,180° + i\,sin\,180°) = \sqrt{2}\,(-1 + i \cdot 0) = -\sqrt{2}$

d) $17_{0°} = 17$

e) $1_{(\pi/2)} = cos\,\frac{\pi}{2} + i\,sin\,\frac{\pi}{2} = i$

f) $5_{270°} = -5i$

g) $1_{150°} = cos\,150° + i\,sin\,150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

h) $4_{100°} = 4\,(cos\,100° + i\,sin\,100°) = 4\,(-0{,}17 + i \cdot 0{,}98) = -0{,}69 + 3{,}94i$

12 **Donats els nombres complexos:** $z_1 = 2_{270°}$, $z_2 = 4_{120°}$; $z_3 = 3_{315°}$, **calcula:**

a) $z_1 \cdot z_2$ **b)** $z_2 \cdot z_3$ **c)** $z_1 \cdot z_3$
d) $\frac{z_3}{z_1}$ **e)** $\frac{z_2}{z_1}$ **f)** $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$
g) z_1^2 **h)** z_2^3 **i)** z_3^4

a) $z_1 \cdot z_2 = 8_{30°}$ b) $z_2 \cdot z_3 = 12_{75°}$ c) $z_1 \cdot z_3 = 6_{225°}$

d) $\frac{z_3}{z_1} = 1{,}5_{45°}$ e) $\frac{z_2}{z_1} = 2_{-150°} = 2_{210°}$ f) $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2} = 1{,}5_{105°}$

g) $z_1^2 = 4_{180°}$ h) $z_2^3 = 64_{0°}$ i) $z_3^4 = 81_{180°}$

13 **Expressa en forma polar i calcula.**

a) $(-1 - i)^5$ **b)** $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}\,i}$ **c)** $\sqrt[6]{64}$
d) $\sqrt[3]{8i}$ **e)** $(-2\sqrt{3} + 2i)^6$ **f)** $(3 - 4i)^3$

a) $(-1 - i)^5 = (\sqrt{2}_{225°})^5 = 4\sqrt{2}_{1\,125°} = 4\sqrt{2}_{45°} = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4 + 4i$

b) $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}\,i} = \sqrt[4]{2_{300°}} = \sqrt[4]{2}_{(300° + 360°\,n)/4} = \sqrt[4]{2}_{75° + 90°\,n}$; n = 0, 1, 2, 3

Les quatre arrels són: $\sqrt[4]{2}_{75°}$ $\sqrt[4]{2}_{165°}$ $\sqrt[4]{2}_{255°}$ $\sqrt[4]{2}_{345°}$

c) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{64_{0°}} = \sqrt[4]{2^6}_{(360°\,k)/4} = 2\sqrt{2}_{90°\,k}$; k = 0, 1, 2, 3

Les quatre arrels són: $2\sqrt{2}_{0°} = 2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{90°} = 2\sqrt{2}\,i$ $2\sqrt{2}_{180°} = -2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{270°} = -2\sqrt{2}\,i$

d) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90°}} = 2_{(90° + 360°\,k)/3} = 2_{30° + 120°\,k}$; k = 0, 1, 2

Les tres arrels són: $2_{30°} = \sqrt{3} + i$ $2_{150°} = -\sqrt{3} + i$ $2_{270°} = -2i$

e) $(-2\sqrt{3} + 2i)^6 = (4_{150°})^6 = 4\,096_{900°} = 4\,096_{180°} = -4\,096$

f) $(3 - 4i)^3 = (5_{306°\,52'})^3 = 125_{920°\,36'} = 125_{200°\,36'}$

14 **Calcula i representa gràficament el resultat.**

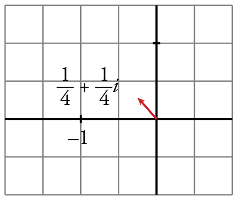
a) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}}$

a) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}_{315^\circ}}{2_{30^\circ}}\right)^3 = \left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{285^\circ}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{855^\circ} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{135^\circ} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\cos 135 + i \sin 135^\circ) =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{-1}{4} + \dfrac{1}{4}i$



b) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}} = \sqrt[3]{\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}} = \sqrt[3]{\dfrac{1+3i}{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i} =$

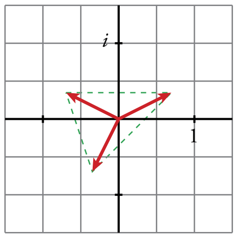
$= \sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)_{71^\circ 34'}} = \left(\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{(71^\circ 34' + 360^\circ k)/3} = \sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{23^\circ 51' + 120^\circ k}$; $k = 0, 1, 2$

Les tres arrels són:

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{23^\circ 51'} = 0,785 + 0,347i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{143^\circ 51'} = -0,693 + 0,56i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{263^\circ 51'} = -0,092 - 0,853i$



15 **Calcula i representa les solucions.**

a) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$ **b)** $\sqrt[4]{-16}$ **c)** $\sqrt[3]{-27i}$

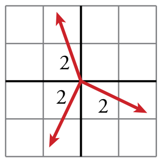
a) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i} = \sqrt[3]{8_{300^\circ}} = 2_{(300^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{100^\circ + 120^\circ k}$; $k = 0, 1, 2$

Les tres arrels són:

$2_{100^\circ} = -0,35 + 1,97i$

$2_{220^\circ} = -1,53 - 1,26i$

$2_{340^\circ} = 1,88 - 0,68i$

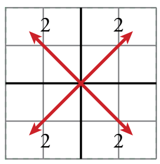


b) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/4} = 2_{45^\circ + 90^\circ k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Les quatre arrels són:

$2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ $\quad 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ $\quad 2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$



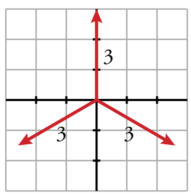
c) $\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270^\circ}} = 3_{(270^\circ + 360^\circ k)/3}$; $k = 0, 1, 2$

Les tres arrels són:

$3_{90^\circ} = 3i$

$3_{210^\circ} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

$3_{330^\circ} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$



16 **Calcula passant a forma polar.**

a) $(1+i\sqrt{3})^5$

b) $\dfrac{8}{(1-i)^5}$

c) $\sqrt[6]{-64}$

d) $\sqrt{\dfrac{2-2i}{-3+3i}}$

a) $(1+i\sqrt{3})^5=(2_{60^\circ})^5=32_{300^\circ}=32\,(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)=32\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16-16\sqrt{3}\,i$

b) $\dfrac{8}{(1-i)^5}=\dfrac{8_{0^\circ}}{(\sqrt{2}_{315^\circ})^5}=\dfrac{8_{0^\circ}}{4\sqrt{2}_{1\,575^\circ}}=\dfrac{8_{0^\circ}}{4\sqrt{2}_{135^\circ}}=\left(\dfrac{8}{4\sqrt{2}}\right)_{-135^\circ}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)_{225^\circ}=$

$=\sqrt{2}_{225^\circ}=\sqrt{2}\,(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)=\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-1-i$

c) $\sqrt[6]{-64}=\sqrt[6]{64_{180^\circ}}=\sqrt[6]{2^6}_{(180^\circ+360^\circ k)/6}=2_{30^\circ+60^\circ k};\quad k=0,1,2,3,4,5$

Les sis arrels són:

$2_{30^\circ}=\sqrt{3}+i$ $\qquad 2_{90^\circ}=2i$ $\qquad 2_{150^\circ}=-\sqrt{3}+i$

$2_{210^\circ}=-\sqrt{3}-i$ $\qquad 2_{270^\circ}=-2$ $\qquad 2_{330^\circ}=\sqrt{3}-i$

d) $\sqrt{\dfrac{2-2i}{-3+3i}}=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}_{315^\circ}}{3\sqrt{2}_{135^\circ}}}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)_{180^\circ}}=\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{(180^\circ+360^\circ k)/2}=\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{90^\circ+180^\circ k};\quad k=0,1$

Les dues arrels són:

$\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{90^\circ}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$ $\qquad \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{270^\circ}=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$

17 **Expressa en forma polar z, l'oposat $-z$, i el conjugat $\bar{z}$ en cada un d'aquests casos:**

a) $z=1-\sqrt{3}i$

b) $z=-2-2i$

c) $z=-2\sqrt{3}+2i$

d) $z=-5$

e) $z=7i$

f) $z=-3-4i$

a) $z=1-\sqrt{3}i=2_{300^\circ};\ -z=-1+\sqrt{3}i=2_{120^\circ};\ \bar{z}=1+\sqrt{3}i=2_{60^\circ}$

b) $z=-2-2i=2\sqrt{2}_{225^\circ};\ -z=2+2i=2\sqrt{2}_{45^\circ};\ \bar{z}=-2+2i=2\sqrt{2}_{135^\circ}$

c) $z=-2\sqrt{3}+2i=4_{150^\circ};\ -z=2\sqrt{3}-2i=4_{330^\circ};\ \bar{z}=-2\sqrt{3}-2i=4_{210^\circ}$

d) $z=-5=5_{180^\circ};\ -z=5=5_{0^\circ};\ \bar{z}=-5=5_{180^\circ}$

e) $z=7i=7_{90^\circ};\ -z=-7i=7_{270^\circ};\ \bar{z}=-7i=7_{270^\circ}$

f) $z=-3-4i=5_{233,13^\circ};\ -z=3+4i=5_{53,13^\circ};\ \bar{z}=-3+4i=5_{126,87^\circ}$

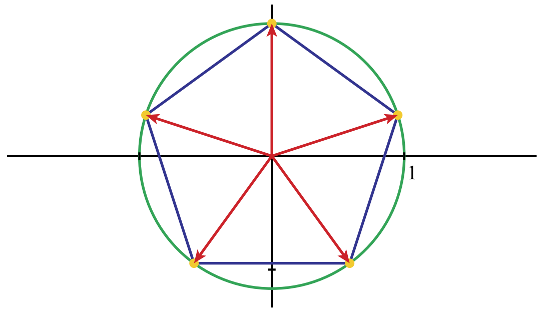
18 **Representa els polígons regulars que tenen per vèrtexs els afixos de les arrels següents:**

a) $\sqrt[5]{i}$ **b)** $\sqrt[6]{-1}$ **c)** $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$

a) $\sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1_{90^\circ}} = 1_{(90^\circ + 360^\circ k)/5} = 1_{18^\circ + 72^\circ k}$; k = 0, 1, 2, 3, 4

Les cinc arrels són: 1_{18°; 1_{90°; 1_{162°; 1_{234°; 1_{306°

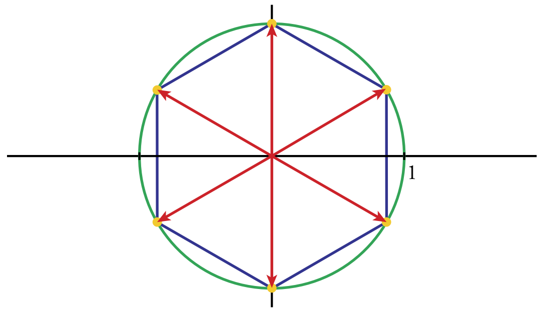
Representació del polígon (pentàgon):



b) $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180^\circ}} = 1_{(180^\circ + 360^\circ k)/6} = 1_{30^\circ + 60^\circ k}$; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5

Las sis arrels són: 1_{30°; 1_{90°; 1_{150°; 1_{210°; 1_{270°; 1_{330°

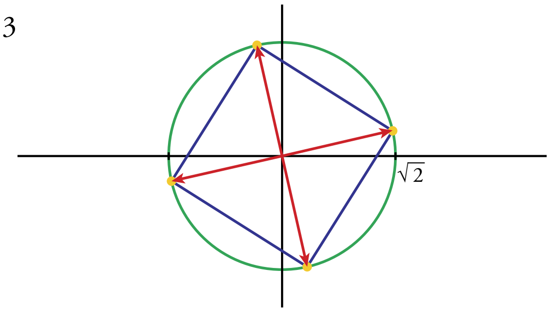
Representació del polígon (hexàgon):



c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i} = \sqrt[4]{4_{30^\circ}} = \sqrt[4]{2^2}_{(30^\circ + 360^\circ k)/4} = \sqrt{2}_{7^\circ 30' + 90^\circ k}$; k = 0, 1, 2, 3

Les quatre arrels són: $\sqrt{2}_{7^\circ 30'}$; $\sqrt{2}_{97^\circ 30'}$; $\sqrt{2}_{187^\circ 30'}$; $\sqrt{2}_{277^\circ 30'}$

Representació del polígon (quadrat):



19 **Calcula** $\bar{z}^5$ **i** $\sqrt[4]{\bar{z}}$**, sint** $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$**.**

Primer, passem z a forma polar:

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$tg\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120^\circ$$ perquè z és en el segon quadrant.

Aleshores $z = 1_{120^\circ}$.

$$\bar{z}^5 = (1_{-120^\circ})^5 = (1_{240^\circ})^5 = (1^5)_{5 \cdot 240^\circ} = 1_{120^\circ} = z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\sqrt[4]{\bar{z}} = \sqrt[4]{1_{240^\circ}} = (\sqrt[4]{1})_{(240^\circ + 360^\circ k)/4}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 1_{60^\circ} = 1\,(cos\ 60^\circ + i\ sin\ 60^\circ) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 1_{150^\circ} = 1\,(cos\ 150^\circ + i\ sin\ 150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 1_{240^\circ} = 1\,(cos\ 240^\circ + i\ sin\ 240^\circ) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 1_{330^\circ} = 1\,(cos\ 330^\circ + i\ sin\ 330^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Pàgina 163

Equacions i sistemes en $\mathbb{C}$

20 **Resol les equacions següents i expressa'n les solucions en forma binòmica:**

a) $z^2 + 4 = 0$

b) $z^2 + z + 4 = 0$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0$

d) $z^2 - z + 1 = 0$

a) $z^2+4=0 \rightarrow z^2=-4 \rightarrow z=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i \left< \begin{array}{l} z_1=-2i \\ z_2=2i \end{array} \right.$

b) $z^2+z+4=0 \rightarrow z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-16}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-15}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{2} \left< \begin{array}{l} z_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}i \\ z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}i \end{array} \right.$

c) $z^2+3z+7=0 \rightarrow z=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-28}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-19}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{19}\,i}{2} \left< \begin{array}{l} z_1=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{19}}{2}i \\ z_2=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{19}}{2}i \end{array} \right.$

d) $z^2-z+1=0 \rightarrow z=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2} \left< \begin{array}{l} z_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{array} \right.$

21 **Resol aquestes equacions:**

a) $z^5 + 32 = 0$ **b)** $iz^3 - 27 = 0$ **c)** $z^3 + 8i = 0$ **d)** $iz^4 + 4 = 0$

a) $z^5+32=0 \rightarrow z^5=-32$

$z=\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{32_{180°}}=2_{(180°+360°k)/5}=2_{36°+72°k};\ k=0, 1, 2, 3, 4$

Las cinc arrels són:

$2_{36°} \quad 2_{108°} \quad 2_{180°} \quad 2_{252°} \quad 2_{324°}$

b) $iz^3-27=0 \rightarrow z^3+27i=0 \rightarrow z^3=-27i$

$z=\sqrt[3]{-27i}=\sqrt[3]{27_{270°}}=3_{(270°+360°k)/3}=3_{90°+120°k};\ k=0, 1, 2$

Les tres arrels són:

$3_{90°} \quad 3_{210°} \quad 3_{330°}$

c) $z^3+8i=0 \rightarrow z=\sqrt[3]{-8i}=\sqrt[3]{8_{270°}}=2_{(270°+360°k)/3}=2_{90°+120°k};\ k=0, 1, 2$

Les tres arrels són:

$2_{90°}=2i \quad 2_{210°}=-\sqrt{3}-i \quad 2_{330°}=\sqrt{3}-i$

d) $iz^4+4=0 \rightarrow z^4-4i=0 \rightarrow z^4=4i$

$z=\sqrt[4]{4i}=\sqrt[4]{4_{90°}}=\sqrt{2}_{(90°+360°k)/4}=\sqrt{2}_{22°\,30'+90°k};\ k=0, 1, 2, 3$

Les quatre arrels són:

$\sqrt{2}_{22°\,30'}=1,3+0,5i$

$\sqrt{2}_{112°\,30'}=-0,5+1,3i$

$\sqrt{2}_{202°\,30'}=-1,3-0,5i$

$\sqrt{2}_{292°\,30'}=0,5-1,3i$

22 Resol les equacions següents en $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + 4i = 0$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0$

c) $2z^2 + 10 = 0$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

a) $z^2 + 4i = 0 \rightarrow z^2 = -4i \rightarrow z = \sqrt{-4i} = \sqrt{4_{270^\circ}} \rightarrow z = 2_{(270^\circ + 360^\circ k)/2};\ k = 0, 1$

Les dues arrels són: $z_1 = 2_{135^\circ}$, $z_2 = 2_{315^\circ}$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0 \rightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{1 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \left< \begin{array}{l} z_1 = 1 - 2i \\ z_2 = 1 + 2i \end{array} \right.$

c) $2z^2 + 10 = 0 \rightarrow 2z^2 = -10 \rightarrow z^2 = -5 \rightarrow z = \pm\sqrt{5}\,i \left< \begin{array}{l} z_1 = -\sqrt{5}\,i \\ z_2 = \sqrt{5}\,i \end{array} \right.$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

$z^2 = t$

$t^2 + 13t + 36 = 0$

$t = \dfrac{-13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \dfrac{-13 \pm 5}{2} \left< \begin{array}{l} t = -4 \\ t = -9 \end{array} \right.$

$z^2 = -4 \rightarrow z = \pm 2i$

$z^2 = -9 \rightarrow z = \pm 3i$

Les solucions són: $2i = 2_{90^\circ}$; $-2i = 2_{270^\circ}$; $3i = 3_{90^\circ}$; $-3i = 3_{270^\circ}$

23 Obtén les quatre solucions de les equacions següents:

a) $z^4 - 1 = 0$

b) $z^4 + 16 = 0$

c) $z^4 - 8z = 0$

a) $z^4 - 1 = 0 \rightarrow z^4 = 1 \rightarrow z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1_{0^\circ}} = 1_{360^\circ k/4} = 1_{90^\circ k};\ k = 0, 1, 2, 3$

Les quatre arrels són:

$1_{0^\circ} = 1$

$1_{90^\circ} = i$

$1_{180^\circ} = -1$

$1_{270^\circ} = -i$

b) $z^4 + 16 = 0 \rightarrow z^4 = -16 \rightarrow z^4 = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/4} = 2_{45^\circ + 90^\circ k};\ k = 0, 1, 2, 3$

Les quatre arrels són:

$2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

$2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

c) $z^4 - 8z = 0 \rightarrow z(z^3 - 8) = 0 \left< \begin{array}{l} z = 0 \\ z = \sqrt[3]{8} \end{array} \right.$

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0^\circ}} = 2_{(360^\circ k)/3} = 2_{120^\circ k};\ k = 0, 1, 2$

Les solucions de l'equació són: $0;\ 2_{0^\circ} = 2;\ 2_{120^\circ} = -1 + \sqrt{3}\,i;\ 2_{240^\circ} = -1 - \sqrt{3}\,i$

24 Resol els sistemes d'equacions següents:

a) $\begin{cases} 3z - w = 1 - i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z + 3w = 8 - 3i \\ 2z + w = 6 - i \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 3z - 2w = 11i \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2z - 5w = -5 + 2i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3z - \ \ w = 1 - i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases} \xrightarrow{-3\cdot(1.^{a})} \begin{cases} -9z + 3w = -3 + 3i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases}$

Sumant, obtenim: $-7z = 5 - 5i \rightarrow z = -\frac{5}{7} + \frac{5}{7}i$

$3\left(-\frac{5}{7} + \frac{5}{7}i\right) - w = 1 - i \rightarrow w = -\frac{15}{7} + \frac{15}{7}i - 1 + i = -\frac{22}{7} + \frac{22}{7}i$

b) $\begin{cases} z + 3w = 8 - 3i \\ 2z + \ \ w = 6 - i \end{cases} \xrightarrow{-2\cdot(1.^{a})} \begin{cases} -2z - 6w = -16 + 6i \\ 2z + \ \ w = 6 - i \end{cases}$

Sumant obtenim: $-5w = -10 + 5i \rightarrow w = 2 - i$

$z + 3(2 - i) = 8 - 3i \rightarrow z = 8 - 3i - 6 + 3i = 2$

c) $\begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 3z - 2w = 11i \end{cases} \xrightarrow{2\cdot(2.^{a})} \begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 6z - 4w = 22i \end{cases}$

Sumant, obtenim: $11z = 33i \rightarrow z = 3i$

$5(3i) + 4w = 11i \rightarrow 4w = -4i \rightarrow w = -i$

d) $\begin{cases} 2z - 5w = -5 + 2i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases} \xrightarrow{-2\cdot(1.^{a})} \begin{cases} -4z + 10w = 10 - 4i \\ 4z - \ \ 3w = -3 - 10i \end{cases}$

Sumant obtenim: $7w = 7 - 14i \rightarrow w = 1 - 2i$

$2z - 5(1 - 2i) = -5 + 2i \rightarrow 2z = -5 + 2i + 5 - 10i \rightarrow z = -4i$

Per resoldre

25 Calcula a i b de manera que es verifiqui:

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i$$

$(a + bi)^2 = 3 + 4i \rightarrow a^2 + bi^2 + 2abi = 3 + 4i \rightarrow$

$\rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \rightarrow b = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a} \end{cases}$

$a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \rightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \rightarrow a^4 - 4 = 3a^2 \rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$

$a^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2 \\ a^2 = -1 \text{ (no val)} \end{cases}$

$a = -2 \rightarrow b = -1$

$a = 2 \rightarrow b = 1$

26 **Troba el valor de b perquè el producte $(3-6i)(4+bi)$ sigui un nombre:**

a) imaginari pur. **b) real.**

$$(3-6i)(4+bi) = 12+3bi-24i+6b = (12+6b)+(3b-24)\,i$$

a) $12+6b=0 \rightarrow b=-2$

b) $3b-24=0 \rightarrow b=8$

27 **Determina a perquè $(a-2i)^2$ sigui un nombre imaginari pur.**

$$(a-2i)^2 = a^2+4i^2-4ai = (a^2-4)-4ai$$

Perquè sigui imaginari pur, ha de ser:

$$a^2-4=0 \rightarrow a=\pm 2 \begin{cases} a_1=-2 \\ a_2=2 \end{cases}$$

28 **Calcula x perquè el resultat de $(x+2+ix)(x-i)$ sigui un nombre real.**

$$(x+2+ix)(x-i) = x^2-xi+2x-2i+x^2i-xi^2 =$$
$$= x^2-xi+2x-2i+ix^2+x = (x^2+3x)+(x^2-x-2)\,i$$

Perquè sigui real, ha de ser:

$$x^2-x-2=0 \rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases}$$

29 **Calcula el valor que ha de tenir a perquè el mòdul del quocient $\dfrac{a+2i}{1-i}$ sigui $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.**

$$z=\frac{a+2i}{1-i}=\frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{a+ai+2i+2i^2}{1+1}=\frac{a-2+(a+2)\,i}{2}$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{a-2}{2}\right)^2+\left(\frac{a+2}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+4}{2}} \rightarrow \sqrt{\frac{a^2+4}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Elevem al quadrat els dos membres de la igualtat:

$$\frac{a^2+4}{2}=\frac{9}{2} \rightarrow a^2=5 \begin{cases} a_1=\sqrt{5} \\ a_2=-\sqrt{5} \end{cases}$$

30 **La suma de dos nombres complexos és $3+i$. La part real del primer és 2 i el quocient entre aquest i el segon és un nombre real. Troba'ls.**

Siguin $z=2+bi$ i $w=c+di$ els nombres complexos buscats.

$$z+w=3+i \rightarrow 2+bi+c+di=3+i \rightarrow \begin{cases} 2+c=3 \rightarrow c=1 \\ b+d=1 \ (1) \end{cases}$$

Per altra banda:

$$\frac{z}{w}=k \rightarrow z=kw \rightarrow 2+bi=k(1+di) \rightarrow \begin{cases} 2=k \\ bi=kdi \rightarrow b=2d \end{cases}$$

Ara substituïm en (1):

$$b+d=1 \rightarrow 2d+d=1 \rightarrow d=\frac{1}{3} \rightarrow b=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Els nombres buscats són $z=2+\dfrac{2}{3}i$ y $w=1+\dfrac{1}{3}i$.

31 **Si $z=(i^0+i^1+i^2+i^3+\ldots+i^{10})(3+ki)$, troba el valor de k perquè el mòdul de z sigui 5.**

$i^0+i^1+\ldots+i^{10}=\dfrac{i\cdot i^{10}-i^0}{i-1}$ perquè és la suma dels termes d'una progressió geomètrica de raó i.

$$\frac{i\cdot i^{10}-i^0}{i-1}=\frac{i^{11}-i^0}{i-1}=\frac{-i-1}{i-1}=\frac{(-i-1)(i+1)}{(i-1)(i+1)}=\frac{-i^2-i-i-1}{i^2-1}=\frac{-2i}{-2}=i$$

Per tant: $z = i \cdot (3 + ki) = -k + 3i$

$|z| = \sqrt{(-k)^2 + 3^2} = \sqrt{k^2 + 9}$

$|z| = 5 \rightarrow \sqrt{k^2 + 9} = 5 \rightarrow k_1 = 2,\ k_2 = -2$

32 **Per a quins valors de x és imaginari pur el quocient $\dfrac{x - 4i}{x + i}$?**

$$\frac{x-4i}{x+i} = \frac{(x-4i)(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{x^2-4}{x^2+1} + \frac{-5x}{x^2+1}i$$

Perquè sigui imaginari pur, ha de ser:

$$\frac{x^2-4}{x^2+1} = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

33 **Troba dos nombres complexos tals que el seu quocient sigui 3, la suma dels seus arguments $\pi/3$, i la suma dels seus mòduls 8.**

* ***Anomena'ls r_α i s_β i escriu les condicions que els relacionen.***

$\dfrac{r}{s} = 3$

$r + s = 8$

$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3}$

$\alpha - \beta = 0°$

Trobem els seus mòduls:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{r}{s} = 3 \\ r + s = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} r = 3s \\ 3s + s = 8;\ 4s = 8;\ s = 2;\ r = 6 \end{array}$$

Trobem els seus arguments:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3} \\ \alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \alpha = \beta;\ 2\beta = \frac{\pi}{3};\ \beta = \frac{\pi}{6};\ \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Els números seran: $6_{\pi/6}$ i $2_{\pi/6}$

34 **El producte de dos nombres complexos és $2_{90°}$ i el cub del primer dividit per l'altre és $(1/2)_{0°}$. Troba'ls.**

Anomenem els nombres així: $z = r_\alpha$ i $w = s_\beta$

$$r_\alpha \cdot s_\beta = 2_{90°} \begin{cases} r \cdot s = 2 \\ \alpha + \beta = 90° \end{cases}$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{s_\beta} = \left(\frac{1}{2}\right)_{0°} \begin{cases} r^3/s = \dfrac{1}{2} \\ 3\alpha - \beta = 90° \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} r \cdot s = 2 \\ \dfrac{r^3}{s} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} r \cdot s = 2 \\ s = 2r^3 \end{array}\right\} r \cdot 2r^3 = 2 \rightarrow r^4 = 1 \rightarrow r = \begin{cases} 1 \rightarrow s = 2 \cdot 1^3 = 2 \\ -1 \text{ (no val)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 90° \\ 3\alpha - \beta = 0° \end{array}\right\} \rightarrow 4\alpha = 90° + 360°\,k \rightarrow \alpha = \frac{90° + 360°\,k}{4};\ k = 0, 1, 2, 3$$

$\beta = 90° - \alpha$

Hi ha quatre solucions:

$z_1 = 1_{22°\,30'} \to w_1 = 2z_1^3 = 2 \cdot 1_{67°\,30'} = 2_{67°\,30'}$

$z_2 = 1_{112°\,30'} \to w_2 = 2_{337°\,30'}$

$z_3 = 1_{202°\,30'} \to w_3 = 2_{607°\,30'} = 2_{247°\,30'}$

$z_4 = 1_{292°\,30'} \to w_4 = 2_{877°\,30'} = 2_{157°\,30'}$

35 **El producte de dos nombres complexos és –27 i un d'aquests és igual al quadrat de l'altre. Calcula'ls.**

Anomenem z i w els complexos buscats.

$$\begin{cases} zw = -27 \to w^3 = -27 \to w = \sqrt[3]{-27} \to w = \sqrt[3]{27_{180°}} = 3_{(180°\cdot 360°k)/3};\ k = 0, 1, 2 \\ z = w^2 \end{cases}$$

- Si $k = 0 \to w_1 = 3_{60°} = 3\,(cos\,60° + i\,sin\,60°) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

  $z_1 = w_1^2 = (3_{60°})^2 = 9_{120°} = 9\,(cos\,120° + i\,sin\,120°) = -\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}i$

- Si $k = 1 \to w_2 = 3_{180°} = 3\,(cos\,180° + i\,sin\,180°) = -3$

  $z_2 = w_2^2 = (3_{180°})^2 = 9_{0°} = 9\,(cos\,0° + i\,sin\,0°) = 9$

- Si $k = 2 \to w_3 = 3_{300°} = 3\,(cos\,300° + i\,sin\,300°) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

  $z_3 = w_3^2 = (3_{300°})^2 = 9_{240°} = 9\,(cos\,240° + i\,sin\,240°) = -\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i$

Hem obtingut tres solucions del problema.

36 **Troba, en funció de x, el mòdul de $z = \frac{1+xi}{1-xi}$.**

Demostra que $|z| = 1$ per a qualsevol valor de x.

$$|z| = \left|\frac{1+xi}{1-xi}\right| = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

O bé:

$$z = \frac{1+xi}{1-xi} = \frac{(1+xi)(1+xi)}{(1-xi)(1+xi)} = \frac{1+x^2+2xi}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+x^4-2x^2+4x^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{1} = 1$$

37 **Troba dos nombres complexos conjugats sabent que la seva suma és 8 i que la suma dels seus mòduls és 10.**

$$\left.\begin{array}{l} z + \overline{z} = 8 \\ |z| + |\overline{z}| = 10 \end{array}\right\} \text{Com que } |z| = |\overline{z}| \to |z| = 5$$

Si anomenem:

$z = a + bi \to \overline{z} = a - bi$

$z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a = 8 \to a = 4$

$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+b^2} = 5 \to 16 + b^2 = 25 \to b^2 = 9 \to b = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Hi ha dues solucions:

$z_1 = 4 + 3i \to \overline{z}_1 = 4 - 3i$

$z_2 = 4 - 3i \to \overline{z}_2 = 4 + 3i$

38 **Representa gràficament els resultats que obtinguis en trobar $\sqrt[3]{-2-2i}$ i calcula el costat del triangle que es forma en unir aquests tres punts.**

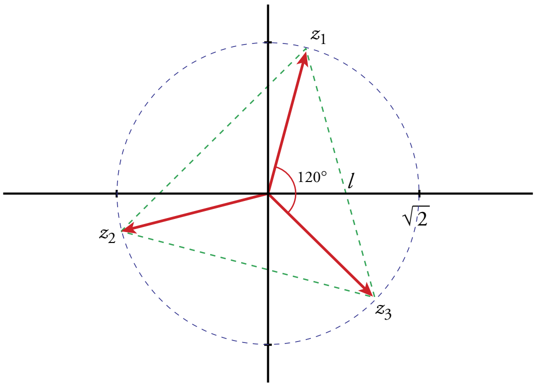
$\sqrt[3]{-2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{225°}} = \sqrt{2}_{(225° + 360°\,k)/3} = \sqrt{2}_{75° + 120°\,k}$

Les tres arrels són:

$z_1 = \sqrt{2}_{75°}$

$z_2 = \sqrt{2}_{195°}$

$z_3 = \sqrt{2}_{315°}$



Per trobar la longitud del costat, apliquem el teorema del cosinus:

$l^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\cos 120° = 2 + 2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 2 = 6$

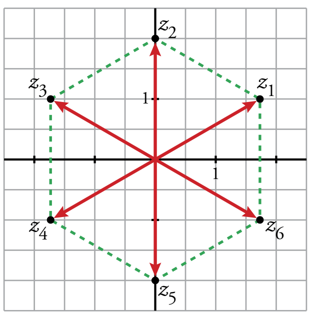
$l = \sqrt{6}$

39 **Dibuixa l'hexagon els vèrtexs del qual són els afixos de $\sqrt[6]{-64}$.**
Obtens el mateix hexàgon amb els afixos de $\sqrt[6]{64i}$; $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[6]{-64i}$?
Comprova-ho i representa els resultats obtinguts.

$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{30°} = 2(\cos 30° + i\sin 30°) = \sqrt{3} + i$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{90°} = 2(\cos 90° + i\sin 90°) = 2i$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{150°} = 2(\cos 150° + i\sin 150°) = -\sqrt{3} + i$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{210°} = 2(\cos 210° + i\sin 210°) = -\sqrt{3} - i$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{270°} = 2(\cos 270° + i\sin 270°) = -2i$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{330°} = 2(\cos 330° + i\sin 330°) = \sqrt{3} - i$

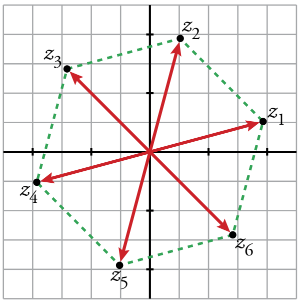
Representació gràfica:



No s'obté el mateix hexàgon perquè les arrels sisenes de dos números distints són diferents. S'obtenen hexàgons girats respecte al primer. Observem els casos següents:

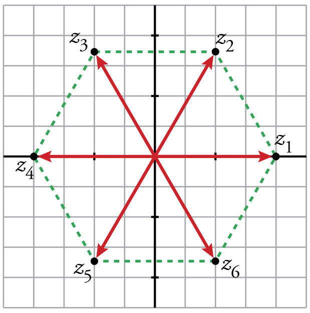
$\sqrt[6]{64i} = \sqrt[6]{64_{90^\circ}} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/6};\ \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{15^\circ}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{75^\circ}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{135^\circ}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{195^\circ}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{255^\circ}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{315^\circ}$



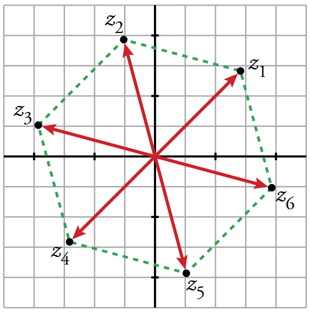
$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0^\circ}} = 2_{(0^\circ + 360^\circ k)/6};\ \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{0^\circ}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{60^\circ}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{120^\circ}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{180^\circ}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{240^\circ}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{300^\circ}$

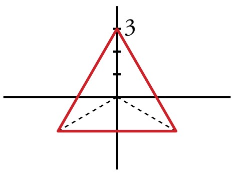


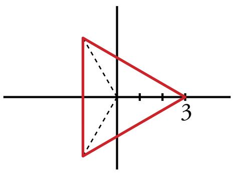
$\sqrt[6]{-64i} = \sqrt[6]{64_{270^\circ}} = 2_{(270^\circ + 360^\circ k)/6};\ \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{45^\circ}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{105^\circ}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{165^\circ}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{225^\circ}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{285^\circ}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{345^\circ}$



40 **Troba els nombres complexos que corresponen als vèrtexs d'aquests triangles equilàters.**





Com que els afixos són en els vèrtexs d'un triangle equilàter, els nombres complexos són:

a) $z_1 = 3_{90^\circ} = 3i$

$z_2 = 3_{210^\circ} = 3\,(cos\ 210^\circ + i\ sin\ 210^\circ) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

$z_3 = 3_{330^\circ} = 3\,(cos\ 330^\circ + i\ sin\ 330^\circ) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

b) $z_1 = 3_{0^\circ} = 3$

$z_2 = 3_{120^\circ} = 3\,(cos\ 120^\circ + i\ sin\ 120^\circ) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

$z_3 = 3_{240^\circ} = 3\,(cos\ 240^\circ + i\ sin\ 240^\circ) = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

41 **¿Poden ser les arrels d'un complex z els nombres $2_{28°}$, $2_{100°}$, $2_{172°}$, $2_{244°}$ i $2_{316°}$? En cas afirmatiu, troba z.**

* *Comprova si els angles que formen aquestes arrels corresponen als vèrtex d'un pentàgon regular.*

$$28° + 72° = 100° \qquad 100° + 72° = 172°$$
$$172° + 72° = 244° \qquad 244° + 72° = 316°$$

Sí, són les arrels cinquenes d'un nombre complex. El trobem elevant a la cinquena qualsevol d'aquestes:

$$z = (2_{28°})^5 = 32_{140°}$$

42 **El nombre complex $3_{40°}$ és vèrtex d'un pentagon regular. Troba els altres vèrtexs i el nombre complex les arrels cinquenes del qual són aquests vèrtexs.**

Els altres vèrtexs seran:

$$3_{112°} \qquad 3_{184°} \qquad 3_{256°} \qquad 3_{328°}$$

El nombre serà: $z = (3_{40°})^5 = 243$

43 **Una de les arrels cúbiques d'un nombre complex z és $1 + i$. Troba z i les altres arrels cúbiques.**

$1 + i = \sqrt{2}_{45°}$

Les altres arrels cúbiques són:

$\sqrt{2}_{45°+120°} = \sqrt{2}_{165°} \qquad \sqrt{2}_{165°+120°} = \sqrt{2}_{285°}$

Trobem z:

$$z = (1+i)^3 = (\sqrt{2}_{45°})^3 = \sqrt{8}_{135°} = \sqrt{8}\,(\cos 135° + i \sin 135°) = \sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i$$

44 **Busca dos nombres complexos si la seva suma és $-3 + 3i$ i una de les arrels quadrades del seu quocient és $2i$.**

Siguin z i w els nombres complexos buscats. Aleshores,

$$\begin{cases} z + w = -3 + 3i \\ \dfrac{z}{w} = (2i)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z + w = -3 + 3i \rightarrow -4w + w = -3 + 3i \rightarrow w = 1 - i \\ z = -4w \end{cases}$$

$z = -4(1 - i) = -4 + 4i$

45 **Calcula el valor que ha de tenir b perquè el mòdul de $\dfrac{-3+bi}{1-2i}$ sigui igual a $\sqrt{2}$.**

$$\frac{-3+bi}{1-2i} = \frac{(-3+bi)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-3-6i+bi+2bi^2}{1+4} = \frac{-3-2b}{14} + \frac{b-6}{14}i$$

Com que el mòdul d'aquest número ha de ser $\sqrt{2}$, obtenim:

$$\sqrt{\left(\frac{-3-2b}{14}\right)^2 + \left(\frac{b-6}{14}\right)^2} = \sqrt{2} \rightarrow \frac{\sqrt{5b^2+45}}{14} = \sqrt{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{5b^2+45}{196} = 2 \rightarrow 5b^2 = 347 \rightarrow b_1 = \sqrt{\frac{347}{5}},\ b_2 = -\sqrt{\frac{347}{5}}$$

46 **Expressa $\cos 4\alpha$ i $\sin 4\alpha$ en funció de $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, usant la fórmula de Moivre. Tingues en compte que $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.**

$$\cos 4\alpha + i \sin 4\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^4 = \cos^4\alpha + 4i\cos^3\alpha\sin\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha - 4i\cos\alpha\sin^3\alpha + \sin^4\alpha =$$
$$= \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha + i(4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha)$$

D'aquí obtenim que:

$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$

$\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha$

Pàgina 164

47 **Un pentàgon regular amb centre en l'origen de coordenades té un dels vèrtexs en el punt ($\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$). Troba els altres vèrtexs i la longitud del costat.**

El punt ($\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$) correspon a l'afix del nombre complex $z = \sqrt{3} + \sqrt{3}\,i = \sqrt{6}_{45°} \simeq 2{,}45_{45°}$.

Per trobar els altres vèrtexs, multipliquem z per $1_{72°}$:

$z_2 = 2{,}45_{117°} = -1{,}11 + 2{,}18i$ $\quad$ $z_3 = 2{,}45_{189°} = -2{,}42 - 0{,}38i$

$z_4 = 2{,}45_{261°} = -0{,}38 - 2{,}42i$ $\quad$ $z_5 = 2{,}45_{333°} = 2{,}18 - 1{,}11i$

Els altres quatre vèrtexs seran:

(–1,11; 2,18) (–2,42; –0,38) (–0,38; –2,42) (2,18; –1,11)

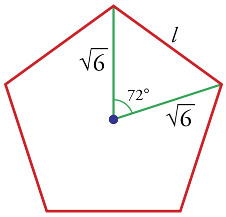
Trobem la longitud del costat aplicant el teorema del cosinus:

$l^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos 72°$

$l^2 = 6 + 6 - 3\sqrt{6}(0{,}309)$

$l^2 = 12 - 2{,}271 = 9{,}729$

$l = \sqrt{9{,}729} = 3{,}119$ unitats



48 **L'afix de $3 + 2i$ és un dels vèrtexs d'un quadrat amb centre en l'origen de coordenades. Troba els altres vèrtexs i l'àrea del quadrat.**

Si tenim un vèrtex d'un quadrat centrat en l'origen, per calcular els altres vèrtexs hem de multiplicar per $i = 1_{90°}$ i així fer girs de 90°.

$z_1 = 3 + 2i$ $\quad$ $z_2 = (3 + 2i)i = -2 + 3i$ $\quad$ $z_3 = (-2 + 3i)i = -3 - 2i$ $\quad$ $z_4 = (-3 - 2i)i = 2 - 3i$

Els altres vèrtexs seran: (–2, 3), (–3, –2) i (2, –3).

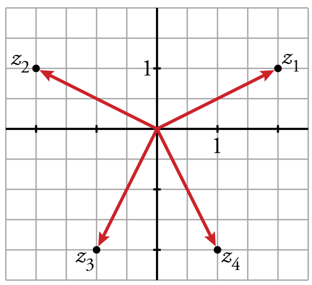
La diagonal del quadrat mesura: $2|z_1| = 2\sqrt{9+4} = 2\sqrt{13}$ perquè està centrat en l'origen.

L'àrea del quadrat és (usant la fórmula de l'àrea d'un rombe):

$$A = \frac{2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13}}{2} = 26 \text{ u}^2$$

49 **Poden ser $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ i $z_4 = 1 - 2i$, les arrels d'un nombre complex? Justifica la teva resposta.**

No, perquè els seus afixos no es troben en els vèrtexs d'un polígon regular centrat en l'origen. Podem comprovar-ho en el gràfic següent:



50 **Siguin A, B, C, D els afixos dels nombres $z_0 = 4$; $z_1 = \frac{1+i}{2}z_0$; $z_2 = \frac{1+i}{2}z_1$; $z_3 = \frac{1+i}{2}z_2$.**

a) Quines són les coordenades de A, B, C i D?

b) Calcula $d_0 = |z_0 - z_1|$; $d_1 = |z_1 - z_2|$; $d_2 = |z_2 - z_3|$ i interpreta geomètricament aquests nombres.

c) Quant mesura la línia poligonal $ABCD$?

a) $z_0 = 4$ $\quad$ $z_1 = \frac{1+i}{2} \cdot 4 = 2 + 2i$ $\quad$ $z_2 = \frac{1+i}{2} \cdot (2+2i) = (1+i)^2 = 2i$ $\quad$ $z_3 = \frac{1+i}{2} \cdot 2i = -1 + i$

Els afixos són: $A(4, 0)$; $B(2, 2)$; $C(0, 2)$; $D(-1, 1)$.

b) $d_0 = |4-(2+2i)| = |2-2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$d_1 = |2+2i-2i| = |2| = 2$

$d_2 = |2i-(-1+i)| = |1+i| = \sqrt{2}$

Les distàncies calculades formen una progressió geomètrica de raó $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) La línia poligonal $ABCD$ mesura $2\sqrt{2}+2+\sqrt{2} = 3\sqrt{2}+2$

51 **Escriu una equació de segon grau les solucions de la qual siguin:**

a) $1+i$ i $1-i$ **b) $5i$ i $-5i$** **c) $2-3i$ i $2+3i$** **d) $4-i$ i $1+2i$**

a) $[x-(1+i)][x-(1-i)] = x^2-(1-i)x-(1+i)x+(1-i^2) =$

$= x^2-(1-i+1+i)x+(1-i^2) = x^2-2x+2 = 0$

b) $(x-5i)(x+5i) = x^2+5xi-5xi-25i^2 = x^2+25 = 0$

c) $[x-(2-3i)][x-(2+3i)] = (x-2-3i)(x-2+3i) =$

$= x^2-2x+3xi-2x+4-6i-3xi+6i-9i^2 = x^2-4x+13 = 0$

d) En aquest cas, l'equació de segon grau no tindrà coeficients reals perquè les solucions no són nombres complexos conjugats.

$[x-(4-i)][x-(1+2i)] = (x-4+i)(x-1-2i) = x^2-(5+i)x+6+7i = 0$

52 **Troba el valor que ha de tenir m perquè $1-2i$ sigui una solució de l'equació $z^2-mz+5=0$.**

Calculem les solucions de l'equació:

$$z = \frac{m \pm \sqrt{m^2-20}}{2} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2-20}{4}}$$

Si $\frac{m}{2} = 1 \rightarrow m = 2 \rightarrow \frac{m^2-20}{4} = \frac{4-20}{4} = -4$

Comprovem ara quines són les solucions si $m = 2$.

$z = \frac{2}{2} \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$

Aleshores, en efecte, $1-2i$ és una d'aquestes.

53 **Resol aquestes equacions:**

a) $2z+3i-2 = 3+zi$

b) $(5+i)z = 3z+4i-2$

c) $(1-i)z^2 = 1+i$

d) $(i^{23}-i^{37})z = 2i^{22}-3i^{19}$

a) $2z-zi = 3-3i+2 \rightarrow z(2-i) = 5-3i \rightarrow z = \frac{5-3i}{2-i} = \frac{(5-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{13-i}{5}$

b) $(5+i)z-3z = 4i-2 \rightarrow (2+i)z = 4i-2 \rightarrow z = \frac{4i-2}{2+i} = \frac{2i(2+i)}{2+i} = 2i$

c) $z^2 = \frac{1+i}{1-i} \rightarrow z^2 = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \rightarrow z^2 = \frac{(1+i)^2}{2}$ $\begin{cases} z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$

d) $(-i-i)z = 2(-1)-3(-i) \rightarrow -2iz = -2+3i \rightarrow z = \frac{-2+3i}{-2i} = -\frac{3}{2}-i$

54 **Troba els nombres complexos z i w que verifiquen cada un d'aquests sistemes d'equacions:**

a) $\begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ z - w = -3 + 4i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z + 2w = 2 + i \\ iz + w = 5 + 5i \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} z + w = -1 + 2i \\ z - w = -3 + 4i \end{array}\right\}$ Sumant membre a membre:

$2z = -4 + 6i \rightarrow z = -2 + 3i$

$w = (-1 + 2i) - (-2 + 3i) = 1 - i$

Solució: $z = -2 + 3i$; $w = 1 - i$

b) $\left.\begin{array}{l} z + 2w = 2 + i \\ iz + w = 5 + 5i \end{array}\right\}$ Multipliquem per –2 la 2a equació i sumem:

$\left.\begin{array}{l} z + 2w = 2 + i \\ -2iz - 2w = -10 - 10i \end{array}\right\} (1 - 2i)z = -8 - 9i \rightarrow z = \dfrac{-8 - 9i}{1 - 2i} = 2 - 5i$

$w = \dfrac{2 + i - (2 - 5i)}{2} = \dfrac{6i}{2} = 3i$

Solució: $z = 2 - 5i$; $w = 3i$

55 **Resol els sistemes d'equacions següents:**

a) $\begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ iz + (1 - i)w = 1 + 3i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z - w = 5 - 3i \\ (2 + i)z + iw = 3 - 3i \end{cases}$

a) Multipliquem per $-i$ la primera equació:

$\left.\begin{array}{l} -iz - iw = i + 2 \\ iz + (1 - i)w = 1 + 3i \end{array}\right\}$ Sumem membre a membre:

$-iw + (1 - i)w = i + 2 + 1 + 3i \rightarrow (1 - 2i)w = 3 + 4i$

$w = \dfrac{3 + 4i}{1 - 2i} = \dfrac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{1^2 - 2i^2} = \dfrac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i$

$z = -1 + 2i - w = -1 + 2i + 1 - 2i = 0$

Solució: $z = 0$; $w = -1 + 2i$

b) Multipliquem per i la primera equació:

$\left.\begin{array}{l} zi - wi = 5i + 3 \\ (2 + i)z + wi = 3 - 3i \end{array}\right\}$ Sumem membre a membre:

$zi + (2 + i)z = 5i + 3 + 3 - 3i \rightarrow (2 + 2i)z = 6 + 2i$

$z = \dfrac{6 + 2i}{2 + 2i} = \dfrac{(6 + 2i)(2 - 2i)}{4 - 4i^2} = \dfrac{16 - 8i}{8} = 2 - i$

$w = z - 5 + 3i = 2 - i - 5 + 3i = -3 + 2i$

Solució: $z = 2 - i$; $w = -3 + 2i$

56 Resol les equacions següents:

a) $z^3 + z^2 - 2 = 0$

b) $z^3 - 3z^2 + z + 5 = 0$

c) $z^4 - 7z^2 - 144 = 0$

d) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

a) Usant el mètode de Ruffini, obtenim:

$$z^3 + z^2 - 2 = (z-1)(z^2+2z+2) \rightarrow z_1 = 1$$

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i \rightarrow z_2 = -1+i,\ z_3 = -1-i$$

b) Usant el mètode de Ruffini, obtenim:

$$z^3 - 3z^2 + z + 5 = (z+1)(z^2-4z+5) \rightarrow z_1 = -1$$

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \rightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i \rightarrow z_2 = 2+i,\ z_3 = 2-i$$

c) $z^4 - 7z^2 - 144 = 0$

Se tracta d'una equació biquadrada. Fent el corresponent canvi de variable, obtenim:

$$z^2 = -9 \rightarrow z = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i \rightarrow z_1 = 3i,\ z_2 = -3i$$

$$z^2 = 16 \rightarrow z = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \rightarrow z_3 = 4,\ z_4 = -4$$

d) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

Es tracta d'una equació biquadrada. Fent el corresponent canvi de variable, obtenim:

$$z^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$

$$z^2 = -1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ} \rightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}_{135^\circ}} = \sqrt[4]{2}_{(135+360^\circ k)/2};\ k = 0, 1 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}_{67,5^\circ};\ z_2 = \sqrt[4]{2}_{247,5^\circ}$$

$$z^2 = -1 - i = \sqrt{2}_{225^\circ} \rightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}_{225^\circ}} = \sqrt[4]{2}_{(225^\circ+360^\circ k)/2};\ k = 0, 1 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}_{112,5^\circ};\ z_2 = \sqrt[4]{2}_{292,5^\circ}$$

57 Troba els nombres complexos el quadrat dels quals sigui igual al seu conjugat.

Busquem els nombres tals que $z^2 = \overline{z}$.

En forma polar, $(r_\alpha)^2 = r_{-\alpha}$

$$(r^2)_{2\alpha} = r_{-\alpha} \rightarrow \begin{cases} r^2 = r \\ 2\alpha = -\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r(r-1) = 0 \\ 3\alpha = 0^\circ + 360^\circ k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1 = 0,\ r_2 = 1 \\ \alpha_1 = 0^\circ,\ \alpha_2 = 120^\circ,\ \alpha_3 = 240^\circ \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \rightarrow z_1 = 0 \text{ és una solució} \\ r_2 = 1 \rightarrow z_2 = 1_{0^\circ},\ z_3 = 1_{120^\circ},\ z_4 = 1_{240^\circ} \text{ són les altres solucions} \end{cases}$$

(Per calcular els valors de α hem igualat 3α a 0°, 360° i 720°.)

Els nombres són:

$z_1 = 0 \quad z_2 = 1_{0^\circ} \quad z_3 = 1_{120^\circ} \quad z_4 = 1_{240^\circ}$

Interpretació gràfica d'igualtats i desigualtats entre nombres complexos

58 **Representa i descriu amb paraules cada una d'aquestes famílies de nombres complexos:**

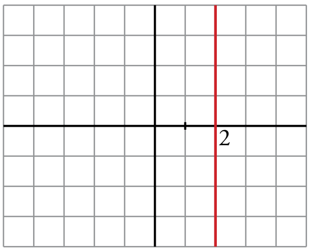
a) $Re\ z = 2$ **b)** $Im\ z = 1$

c) $Re\ z \leq 0$ **d)** $-1 \leq Im\ z \leq 3$

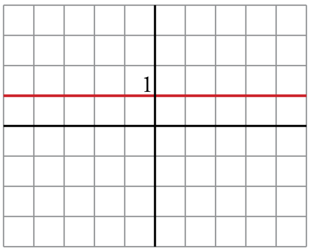
e) $-2 < Re\ z < 5$ **f)** $|z| \leq 3$

g) $Arg\ z = 45°$ **h)** $0° \leq Arg\ z \leq 90°$

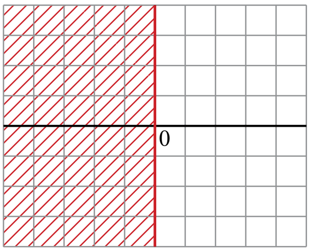
a)



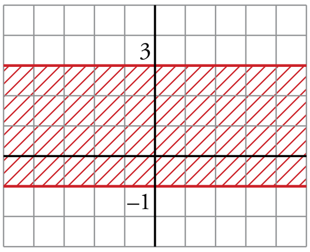
b)



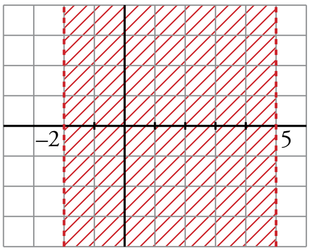
c)



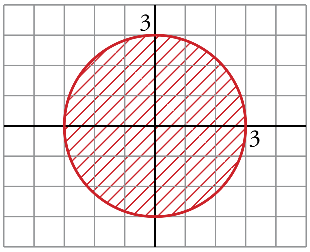
d)



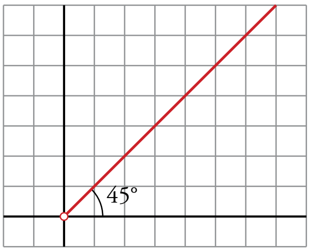
e)



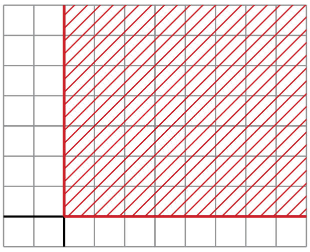
f)



g)



h)



59 **Representa els nombres complexos z tals que $z + \bar{z} = -3$.**

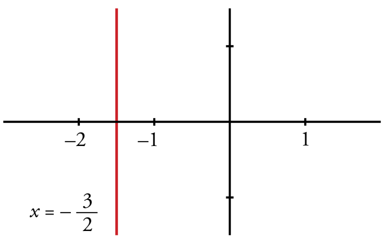
* ***Escriu z en forma binòmica, suma-li el seu conjugat i representa la condició que obtinguis.***

Aomenem $z = x + iy$.

Aleshores: $\bar{z} = x - iy$

Així, $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = -3 \rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

Representació:

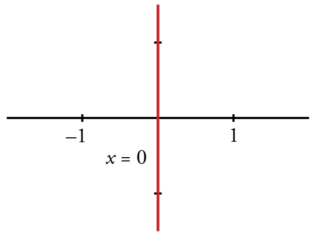


60 **Representa els nombres complexos que verifiquen:**

a) $\bar{z} = -z$ **b)** $|z + \bar{z}| = 3$ **c)** $|z - \bar{z}| = 4$

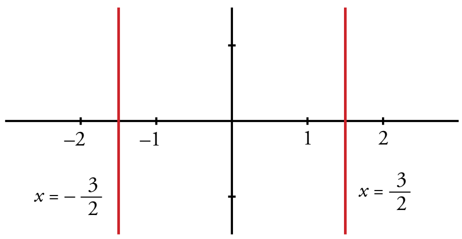
a) $z = x + iy \rightarrow \overline{z} = x - iy$

$\overline{z} = -z \rightarrow x - iy = -x - iy \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$ (és l'eix imaginari)



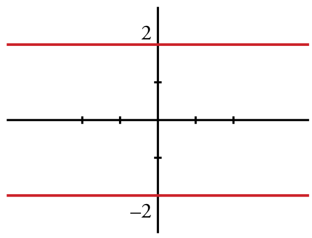
b) $z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x$

$|z + \overline{z}| = |2x| = 3 < \begin{cases} 2x = 3 \rightarrow x = 3/2 \\ 2x = -3 \rightarrow x = -3/2 \end{cases}$



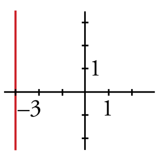
c) $z - \overline{z} = x + iy - z + iy = 2yi$

$|z - \overline{z}| = |2yi| = |2y| = 4 < \begin{cases} 2y = 4 \rightarrow y = 2 \\ 2y = -4 \rightarrow y = -2 \end{cases}$

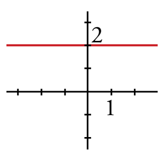


61 **Escriu les condicions que han de complir els nombres complexos la representació gràfica dels quals és la següent:**

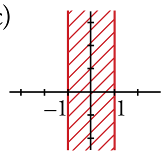
a)



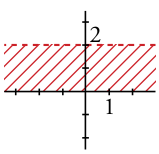
b)



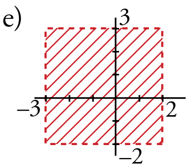
c)



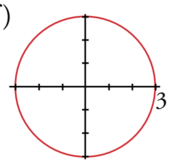
d)



e)



f)



** En a), b) i f) és una igualtat. En c) i d), una desigualtat. En e), dues desigualtats.*

a) $Re\ z = -3$ b) $Im\ z = 2$ c) $-1 \leq Re\ z \leq 1$

d) $0 \leq Im\ z < 2$ e) $\begin{cases} -3 < Re\ z < 2 \\ -2 < Im\ z < 3 \end{cases}$ f) $|z| = 3$

Qüestions teòriques

62 **Es pot dir que un nombre complex és real si el seu argument és 0°?**

No; també són reals els nombres amb argument 180° (els negatius).

63 **Si $z = r_\alpha$, quina relació tenen amb z els nombres $r_{\alpha + 180°}$ i $r_{360° - \alpha}$?**

$r_{\alpha + 180°} = -z$ (oposat de z)

$r_{360° - \alpha} = \overline{z}$ (conjugat de z)

64 **Comprova que:**

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c) $\overline{kz} = k\,\overline{z}$, **amb** $k \in \mathbb{R}$

$z = a + bi = r_\alpha \rightarrow \overline{z} = a - bi = r_{360° - \alpha}$

$w = c + di = r'_\beta \rightarrow \overline{w} = c - di = r'_{360° - \beta}$

a) $z + w = (a + c) + (b + d)\,i \rightarrow \overline{z + w} = (a + c) - (b + d)\,i$

$\overline{z} + \overline{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)\,i = \overline{z + w}$

b) $x \cdot w = (r \cdot r')_{\alpha + \beta} \rightarrow \overline{z \cdot w} = (r \cdot r')_{360° - (\alpha + \beta)}$

$\overline{z} \cdot \overline{w} = (r \cdot r')_{360° - \alpha + 360° - \beta} = (r \cdot r')_{360° - (\alpha + \beta)} = \overline{z \cdot w}$

c) $kz = ka + kbi \rightarrow \overline{kz} = ka - kbi$

$k\overline{z} = ka - kbi = \overline{kz}$

65 **Demostra que** $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{360° - \alpha} \rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$$

66 **El producte de dos nombres complexos imaginaris, pot ser real? Aclareix-ho amb un exemple.**

Sí. Per exemple:

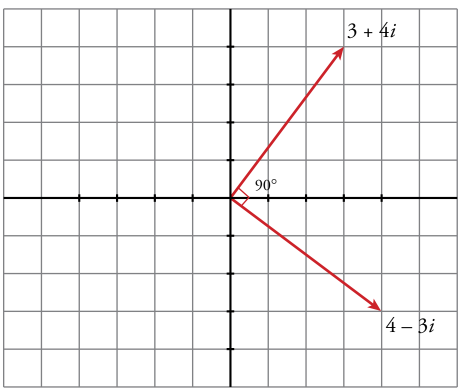
$z = i, \quad w = i$

$z \cdot w = i \cdot i = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$

Pàgina 165

67 **Representa el nombre complex $z = 4 - 3i$. Multiplica'l per i i comprova que el resultat que obtens és el mateix que si apliques a z un gir de 90°.**

$iz = 4i - 3i^2 = 3 + 4i$



68 Quina relació hi ha entre l'argument d'un nombre complex i el del seu oposat?

Es diferencien en 180°. Si l'argument del nombre és α, el del seu oposat és:

$$180° + \alpha$$

69 Quina condició ha de complir un nombre complex $z = a + bi$ perquè $\bar{z} = \frac{1}{z}$?

* ***Troba $\frac{1}{z}$, i iguala a $a - bi$.***

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = a - bi$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{a^2+b^2} = a \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} = -b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{a}{a} = a^2+b^2 \rightarrow a^2+b^2 = 1 \text{ (mòdul 1)} \\ \text{Ha de tenir mòdul 1.} \end{array}$$

70 Siguin z i w dos nombres complexos tals que $|z| = \sqrt{2}$ i $|w| = \sqrt{2}$. Justifica si les igualtats següents són certes o falses:

a) $|z + w| = 2\sqrt{2}$ **b) $|3z| = 3\sqrt{2}$** **c) $|z \cdot w| = 2$** **d) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$**

Per resoldre aquest problema hem de tenir en compte que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$:

$z = a + bi \rightarrow z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

a) Fals, perquè $z + w$ representa la diagonal del quadrat els costats de la qual són z i w. Per tant, la seva longitud no pot ser la suma de les longituds dels costats.

b) Cert.

Si $z = a + bi \rightarrow 3z = 3a + 3bi$

$|3z| = |3a + 3bi| = \sqrt{(3a)^2 + (3b)^2} = 3\sqrt{a^2+b^2} = 3|z| = 3\sqrt{2}$

c) Cert. El mòdul del producte de dos nombres complexos és el producte dels mòduls, tal com hem vist en les operacions en forma polar.

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

d) Cert. En forma polar $\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$ i, per tant, el mòdul de l'invers d'un nombre complex és l'invers del mòdul.

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

71 Si $z = r_\alpha$ i $w = s_\beta$, quina relació hi ha d'haver entre α i β pequè es compleixi cada una de les afirmacions següents?

a) $z \cdot w$ és imaginari pur.

b) z/w és un nombre real.

c) $z \cdot w$ és a la bisectriu del primer o tercer quadrant.

a) $z \cdot w = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$

Per tant, $\alpha + \beta = 90°$ o $\alpha + \beta = 270°$, és a dir, $\beta = 90° - \alpha$, $\beta = 450° - \alpha$ o $\beta = 270° - \alpha$, $\beta = 630° - \alpha$.

b) $\frac{z}{w} = \frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$

Per tant, $\alpha - \beta = 0°$ o $\alpha - \beta = 180°$, és a dir, $\beta = \alpha$ o $\beta = \alpha - 180°$.

c) $z \cdot w = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$

Per tant, $\alpha + \beta = 45°$ o $\alpha + \beta = 225°$, és a dir, $\beta = 45° - \alpha$, $\beta = 405° - \alpha$ o $\beta = 225° - \alpha$, $\beta = 585° - \alpha$.

72 **Sigui $z \neq 0$ un nombre complex i $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Justifica que els afixos de z, zw i zw^2 són els vèrtexs d'un triangle equilàter.**

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$tg\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120°$$

L'afix de $zw = z \cdot (1_{120°})$ és el punt que s'obté girant z un angle de 120° respecte de l'origen de coordenades.

De la mateixa manera, l'afix de $zw^2 = z \cdot (1_{240°})$ és el punt que s'obté girant z un angle de 240° respecte de l'origen de coordenades.

Per tant, els afixos dels tres nombres complexos són en els vèrtexs d'un triangle equilàter.

Per aprofundir

73 **Troba els nombres complexos el cub dels quals coincideix amb el quadrat del conjugat.**

Si el nombre complex és r_α, tenim que:

$$(r_\alpha)^3 = (r_{-\alpha})^2 \rightarrow (r^3)_{3\alpha} = (r^2)_{-2\alpha} \rightarrow \begin{cases} r^3 = r^2 \\ 3\alpha = -2\alpha \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r^3 - r^2 = 0 \\ 5\alpha = 0° + 360°k \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r^2(r-1) = 0 \\ 5\alpha = 0° + 360°k \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = 0,\ r_2 = 1 \\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 72°,\ \alpha_3 = 144°,\ \alpha_4 = 216°,\ \alpha_5 = 288° \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \rightarrow z_1 = 0 \text{ és una solució} \\ r_2 = 1 \rightarrow z_2 = 1_{0°},\ z_3 = 1_{72°},\ z_4 = 1_{144°},\ z_5 = 1_{216°},\ z_6 = 1_{288°} \text{ són les altres solucions.} \end{cases}$$

Els nombres són: 0, $1_{0°}$, $1_{72°}$, $1_{144°}$, $1_{216°}$ i $1_{288°}$.

74 **Si el producte de dos nombres complexos és –8 i dividint el cub d'un d'aquests entre l'altre obtenim de resultat 2, quins són el mòdul i l'argument de cada un?**

$$\left.\begin{array}{l} z = r_\alpha \\ w = r'_\beta \\ -8 = 8_{180°} \\ 2 = 2_{0°} \end{array}\right\} r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta} = 8_{180°} \rightarrow \begin{cases} r \cdot r' = 8 \\ \alpha + \beta = 180° \end{cases}$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{r'_\beta} = \frac{r^3{}_{3\alpha}}{r'_\beta} = \left(\frac{r^3}{r'}\right)_{3\alpha-\beta} = 2_{0°} \rightarrow \begin{cases} \frac{r^3}{r'} = 2 \\ 3\alpha - \beta = 0° \end{cases}$$

Així:

$$\left.\begin{array}{l} r \cdot r' = 8 \\ r^3 = 2r' \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} r' = \dfrac{8}{r} \\ r' = \dfrac{r^3}{2} \end{array}\right\} \dfrac{8}{r} = \dfrac{r^3}{2} \rightarrow 16 = r^4 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = 2 \\ r' = 4 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 180° \\ 3\alpha = \beta \end{array}\right\} \alpha + 3\alpha = 180° \rightarrow 4\alpha = 180° \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 45° \\ \beta = 135° \end{array}\right.$$

Per tant, $z = 2_{45°}$, $w = 4_{135°}$

75 **Calcula l'invers dels nombres complexos següents i representa gràficament el resultat que obtinguis:**

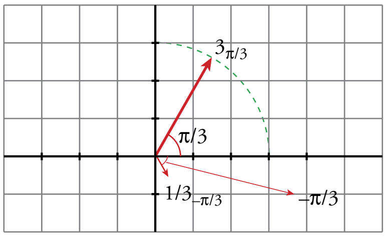
a) $3_{\pi/3}$

b) $2i$

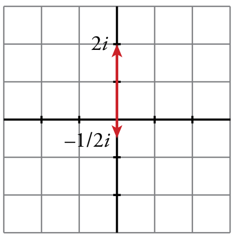
c) $-1 + i$

Quina relació hi ha entre el mòdul i l'argument d'un nombre complex i els del seu invers?

a) $\dfrac{1}{3_{\pi/3}} = \dfrac{1_{0°}}{3_{\pi/3}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{-\pi/3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{5\pi/3}$



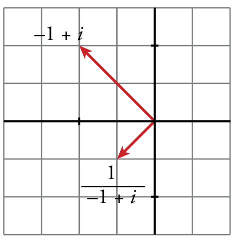
b) $\dfrac{1}{2i} = \dfrac{-i}{2} = \dfrac{-1}{2}i = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{270°}$



c) $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

$$\frac{1}{-1+i} = \frac{1_{0°}}{\sqrt{2}_{135°}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-135°} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{225°} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Si $z = r_\alpha$, aleshores $\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{1}{r}\right)_{360° - \alpha}$.

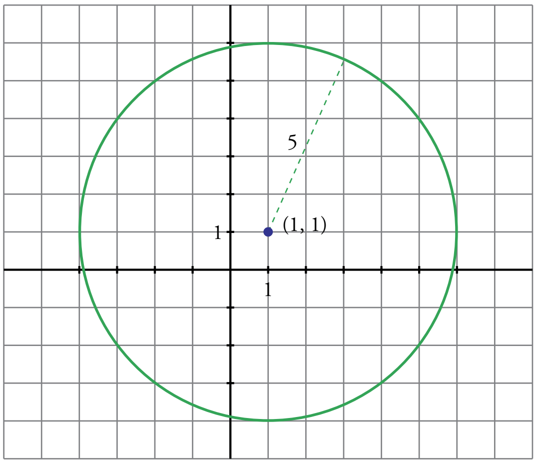


76 **Representa gràficament les igualtats següents. Quina figura es determina en cada cas?**

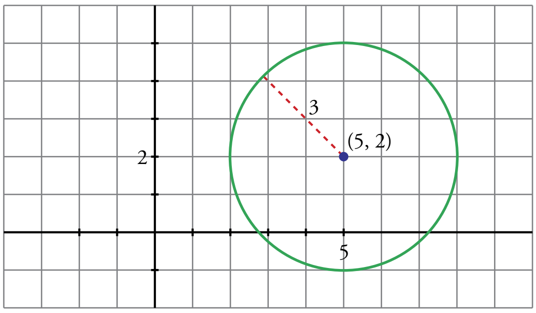
a) $|z - (1 + i)| = 5$

b) $|z - (5 + 2i)| = 3$

a) Circumferència amb centre en (1, 1) i radi 5.



b) Circumferència amb centre en (5, 2) i radi 3.



77 **Escriu la condició que verifiquen tots els nombres complexos els afixos dels quals estiguin en la circumferència de centre (1, 1) i radi 3.**

$|z-(1+i)|=3$

78 **La suma dels nombres complexos $z = a + 3i$ i $w = b - 5i$ dividida per la seva diferència és un nombre imaginari pur. Prova que z i w han de tenir el mateix mòdul.**

$z+w=a+b-2i$

$z-w=a-b+8i$

$\dfrac{a+b-2i}{a-b+8i}=ki$ amb k nombre real $\rightarrow$ $a+b-2i=(a-b+8i)ki$ $\rightarrow$

$$\rightarrow a+b-2i=-8k+k(a-b)\,i \rightarrow \begin{cases} a+b=-8k \\ -2=k(a-b) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b=-8k \\ a-b=-\dfrac{2}{k} \end{cases}$$

Multiplicant membre a membre obtenim: $a^2-b^2=16$

Per un altre costat:

$|z|=\sqrt{a^2+3^2}=\sqrt{a^2+9}$

$|w|=\sqrt{b^2+(-5)^2}=\sqrt{b^2+25}$

Perquè els mòduls siguin iguals, hauria de ser:

$\sqrt{a^2+9}=\sqrt{b^2+25} \rightarrow a^2+9=b^2+25 \rightarrow a^2-b^2=16$ i això és exactament el que hem obtingut a partir de les dades del problema.

79 **Sigui z un nombre complex l'afix del qual és en la bisectriu del primer quadrant. Comprova que $\frac{z-1-i}{z+1+i}$ és un nombre real.**

El nombre complex que és en la bisectriu del primer quadrant és de la forma $z = a + ai$.

$$\frac{a+ai-1-i}{a+ai+1+i}=\frac{a-1+(a-1)i}{a+1+(a+1)i}=\frac{[a-1+(a-1)i]\cdot[a+1-(a+1)i]}{[a+1+(a+1)i]\cdot[a+1-(a+1)i]}=$$

$$=\frac{(a-1)(a+1)-(a-1)(a+1)i+(a-1)(a+1)i-(a-1)(a+1)i^2}{(a+1)^2+(a+1)^2}=$$

$$=\frac{2(a-1)(a+1)}{2(a+1)^2}=\frac{a-1}{a+1}$$, que és un nombre real.

Autoavaluació

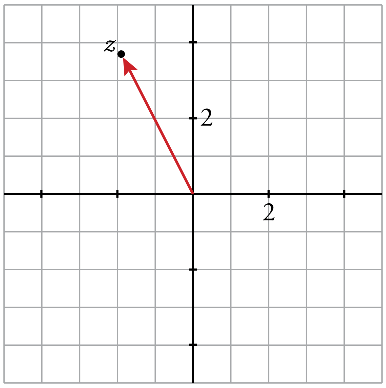
Pàgina 165

1 **Calcula.**

$$\frac{(3-2i)^2-(1+i)(2-i)}{-3+i}$$

$$\frac{(3-2i)^2-(1+i)(2-i)}{-3+i}=\frac{9+4i^2-12i-(2-i+2i-i^2)}{-3+i}=\frac{5-12i-3-i}{-3+i}=$$

$$=\frac{(2-13i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=\frac{-6+13i^2-2i+39i}{9-i^2}=\frac{-19+37i}{10}=-\frac{19}{10}+\frac{37}{10}i$$



2 **Calcula z i expressa'n els resultats en forma binòmica.**

$$\sqrt[4]{z}=\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}$$

$$z=\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}\right)^4$$

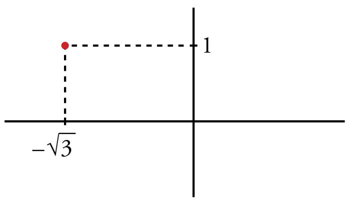
Passem numerador i denominador a forma polar:

$$-\sqrt{3}+i \quad \begin{cases} r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2 \\ tg\ \alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}} \to \alpha=150° \end{cases}$$

$$\sqrt{2}i \to \sqrt{2}_{90°}$$

$$z=\left(\frac{2_{150°}}{\sqrt{2}_{90°}}\right)^4=(\sqrt{2}_{60°})^4=4_{240°} \to z=4(cos\ 240°+i\ sin\ 240°)$$

$$z=4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2-2\sqrt{3}i$$



3 **Troba a i b perquè es verifiqui la igualtat:**

$$5(a-2i)=(3+i)(b-i)$$

$5a-10i=3b-i^2-3i+bi \rightarrow 5a-10i=3b+1+(-3+b)\,i$

Igualant els components $\left\{\begin{array}{l} 5a=3b+1 \\ -10=-3+b \end{array}\right\} \rightarrow b=-7,\ a=-4$

4 **Resol l'equació: $z^2-10z+29=0$**

$z=\dfrac{10\pm\sqrt{-16}}{2}=\dfrac{10\pm 4i}{2} \begin{cases} z_1=5+2i \\ z_2=5-2i \end{cases}$

Solucions; $z_1=5+2i,\ z_2=5-2i$

5 **Calcula el valor que ha de prendre x perquè el mòdul de $\dfrac{x+2i}{1-i}$ sigui igual a 2.**

$$\frac{x+2i}{1-i}=\frac{(x+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{x+2i^2+xi+2i}{1-i^2}=\frac{x-2+(x+2)\,i}{1+1}=\frac{x-2}{2}+\frac{x+2}{2}i$$

$$\text{Mòdul}=\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2}=2 \rightarrow \sqrt{\frac{x^2+4}{2}}=2 \rightarrow \frac{x^2+4}{2}=4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2+4=8 \rightarrow x^2=4 \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$$

Solucions: $x_1=2,\ x_2=-2$

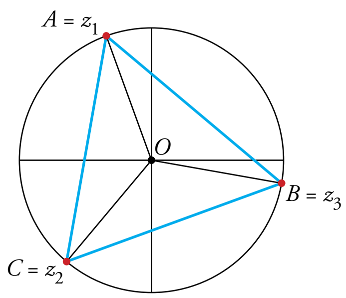
6 **Troba el costat del triangle els vèrtexs del qual són els afixos de les arrels cúbiques de $4\sqrt{3}-4i$.**

$z=\sqrt[3]{4\sqrt{3}-4i}$

Expressem $4\sqrt{3}-4i$ en forma polar:

$$\left.\begin{array}{l} r=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+(-4)^2}=8 \\ tg\ \alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha=330° \end{array}\right\} 4\sqrt{3}-4i=8_{330°}$$

$$z=\sqrt[3]{8_{330°}}=\sqrt[3]{8}_{(330°+360°k)/3} \begin{cases} z_1=2_{110°} \\ z_2=2_{230°} \\ z_3=2_{350°} \end{cases}$$



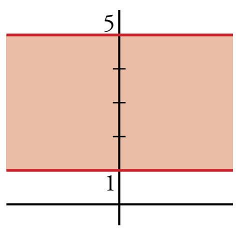
En el triangle AOB coneixem dos costats, $\overline{OA}=\overline{OB}=2$, i l'angle comprès, 120°. Aplicant el teorema del cosinus, obtenim el costat del triangle, $\overline{AB}$:

$\overline{AB}^2=2^2+2^2-2\cdot 2\cdot 2\cos 120°=12 \rightarrow \overline{AB}=\sqrt{12}=3\sqrt{3}$ u

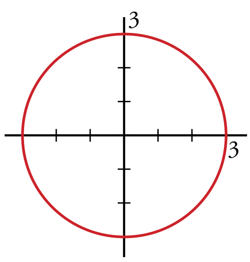
7 **Representa gràficament.**

a) $1\le Im\ z\le 5$ **b)** $|z|=3$ **c)** $z+\bar{z}=-4$

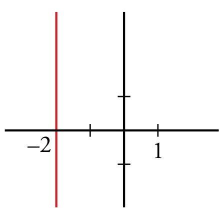
a)



b)



c) $a+bi+a-bi=-4 \rightarrow 2a=-4 \rightarrow a=-2$



8 **Troba dos nombres complexos tals que el seu quocient sigui $2_{150°}$ i el seu producte $18_{90°}$.**

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = 2_{150°} \rightarrow \frac{r}{s} = 2;\ \alpha - \beta = 150°$$

$$r_\alpha \cdot s_\beta = 18_{90°} \rightarrow r \cdot s = 18;\ \alpha + \beta = 90°$$

Resolem els sistemes:

$$\begin{cases} \frac{r}{s} = 2 \\ r \cdot s = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha - \beta = 150° \\ \alpha + \beta = 90° \end{cases}$$

Obtenim:

$$\begin{cases} r = 6 \\ s = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 120° \\ \beta = -30° = 330° \end{cases}$$

Els nombres són $6_{120°}$ i $3_{330°}$. Una altra possible solució és: $6_{300°}$ i $3_{150°}$.

9 **Demostra que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.**

Suposem que $z = a + bi$. Aleshores:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)\,(a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |\,z\,|^2$$

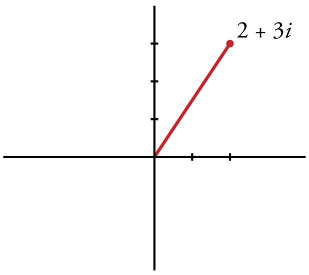
10 **Calcula el valor de $\cos 120°$ i de $\sin 120°$ a partir del producte $1_{90°} \cdot 1_{30°}$.**

$$1_{90°} \cdot 1_{30°} = 1\,(\cos 90° + i \sin 90°) \cdot 1\,(\cos 30° + i \sin 30°) =$$

$$= i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$1_{90°} \cdot 1_{30°} = 1_{120°} = 1\,(\cos 120° + i \sin 120°) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \rightarrow \cos 120° = -\frac{1}{2};\ \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

11 **Troba el nombre complex z que s'obté en transformar el complex $2 + 3i$ mitjançant un gir de 30° amb centre a l'origen.**



Multipliquem per $1_{30°} = 1\,(\cos 30° + i \sin 30°)$.

$$z = (2 + 3i) \cdot 1_{30°} = (2 + 3i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z = \sqrt{3} + \frac{3}{2} i^2 + i + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$

$$z = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} + \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2} i$$